

Capitolul 1 – Semnale și secvențe

Problema 1 – Generarea unei exponențiale complexe: Se dorește generarea și reprezentarea grafică a secvenței exponențiale complexe:

$$x(n) = 1.5 \exp \left[\left(-\frac{1}{10} + j \frac{\pi}{5} \right) n \right], \quad n = \overline{0, 50}.$$

Secvența fiind una complexă, vom putea afișa partea reală a acesteia, respectiv partea imaginară.

$$x(n) = 1.5 \exp \left[\left(-\frac{1}{10} + j \frac{\pi}{5} \right) n \right] = 1.5 \exp \left(-\frac{1}{10} n \right) \cos \frac{\pi n}{5} + j 1.5 \exp \left(-\frac{1}{10} n \right) \sin \frac{\pi n}{5}$$

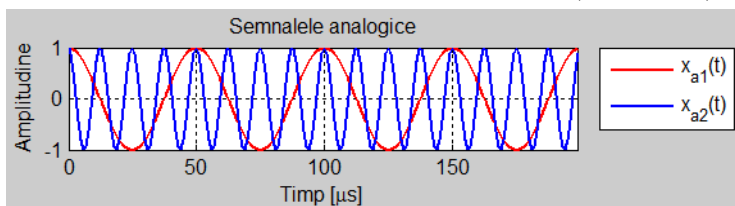
Partea reală a secvenței $x(n)$ este: $\Rightarrow \operatorname{Re}\{x(n)\} = 1.5 \exp \left(-\frac{1}{10} n \right) \cos \frac{\pi n}{5}$,

respectiv partea imaginară: $\Rightarrow \operatorname{Im}\{x(n)\} = 1.5 \exp \left(-\frac{1}{10} n \right) \sin \frac{\pi n}{5}$.

Problema 2 – Eroarea de alias determinată de eșantionare: Se consideră două semnale analogice $x_{a1}(t)$ și $x_{a2}(t)$ cu amplitudinile: $A_1 = A_2 = 1$, frecvențele: $F_1 = 500$ Hz, $F_2 = 2$ kHz și fazele: $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, care se eșantionează cu: $F_s = 2.5$ kHz. Se urmărește reprezentarea semnalelor analogice, a secvențelor discrete obținute după eșantionare și a semnalelor reconstituite din eșantioane.

Semnalele analogice:

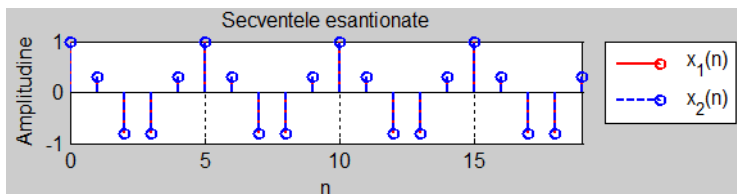
$$x_{a1}(t) = \cos(2\pi 500t); \quad x_{a2}(t) = \cos(2\pi 2 \cdot 10^3 t)$$



Secvențele obținute în urma eșantionării:

$$x_1(n) = \cos \left(2\pi \frac{500}{2.5 \cdot 10^3} n \right) = \cos \left(2\pi \frac{1}{5} n \right);$$

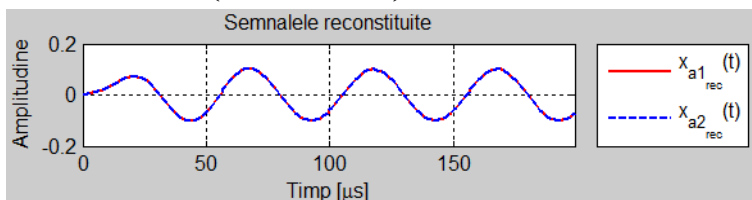
$$x_2(n) = \cos \left(2\pi \frac{2 \cdot 10^3}{2.5 \cdot 10^3} n \right) = \cos \left(2\pi \frac{2}{2.5} n - 2\pi n \right) = \cos \left(2\pi \frac{1}{5} n \right)$$



Semnalele reconstituite din eșantioane:

$$\tilde{x}_{a1}(t) = \cos \left(2\pi \frac{1}{5} 2.5 \cdot 10^3 t \right) = \cos(2\pi 500t) \equiv x_{a1}(t);$$

$$\tilde{x}_{a2}(t) = \cos \left(2\pi \frac{1}{5} 2.5 \cdot 10^3 t \right) = \cos(2\pi 500t) \neq x_{a2}(t)$$



Probleme rezolvate

Cel de-al doilea semnal analogic nu poate fi reconstituit, deoarece pentru acesta nu s-a respectat teorema eșantionării (alias).

Problema 3 – Eșantionare : Se consideră semnalul analogic: $x_a(t) = 2 \cos(100\pi t)$. Se cere:

1. Determinați viteza minimă de eșantionare pentru evitarea oricărui alias.
2. Presupunând că semnalul este eșantionat cu rata $F_s = 200$ Hz, care este semnalul discret în timp obținut după eșantionare?
3. Care este semnalul reconstituit din eșantioanele de la punctul 2?
4. Presupunând că semnalul este eșantionat cu $F_s = 75$ Hz, care este semnalul discret în timp obținut după eșantionare?
5. Care este frecvența $0 < F < F_s/2$ a unei sinusoide, care să producă eșantioane identice cu cele de la punctul 4?
6. Care este semnalul reconstituit din eșantioanele de la punctul 4?

1. Viteza minimă de eșantionare pentru evitarea oricărui alias trebuie să fie dublul frecvenței semnalului:

$$x_a(t) = 2 \cos(2\pi 50t) \Rightarrow F = 50 \text{ Hz} \Rightarrow F_{s\min} = 2F = 100 \text{ Hz}.$$

2. Secvența obținută după eșantionarea cu $F_s = 200$ Hz este:

$$x(n) = x_a\left(\frac{n}{F_s}\right) = 2 \cos\left(2\pi \frac{50}{200}n\right) = 2 \cos\frac{\pi n}{2} \Rightarrow f = \frac{1}{4} \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow \text{perioada este } N = 4.$$

3. Semnalul reconstituit din eșantioanele de la punctul 2 este:

$$\tilde{x}_a(t) = x(tF_s) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} 200t\right) = 2 \cos(100\pi t).$$

Semnalul reconstituit este identic cu semnalul analogic inițial, deoarece a fost respectată teorema eșantionării.

4. Secvența obținută după eșantionarea cu $F_s = 75$ Hz este:

$$x(n) = x_a\left(\frac{n}{F_s}\right) = 2 \cos\left(2\pi \frac{50}{75}n\right) = 2 \cos\left(2\pi \frac{2}{3}n\right) \Rightarrow f = \frac{2}{3} \notin \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

\Rightarrow frecvența discretă trebuie adusă în intervalul fundamental. Din relația (1.9) avem:

$$f_k = f_0 + k, \quad -\frac{1}{2} \leq f_0 \leq \frac{1}{2}.$$

În acest caz particular:

$$f' = f - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3} \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow x'(n) = 2 \cos\left[2\pi \left(-\frac{1}{3}\right)n\right] = 2 \cos\left(2\pi \frac{1}{3}n\right)$$

$$\Rightarrow f = \frac{1}{3} \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow \text{perioada este } N = 3.$$

- 5.

$$f = \frac{F}{F_s} \Rightarrow F = f \cdot F_s = \frac{1}{3} 75 = 25, \quad 0 < 25 < \frac{75}{2}.$$

Rezultă că semnalul analogic: $y_a(t) = 2 \cos(2\pi 25t)$, eșantionat cu $F_s = 75$ Hz, produce aceleași eșantioane ca cele de la punctul 4. În concluzie, $F = 50$ Hz este un alias pentru $F = 25$ Hz, pentru o rată de eșantionare de $F_s = 75$ eșantioane/secundă.

6. Semnalul reconstituit din eșantioanele de la punctul 4 este:

$$\tilde{x}_a(t) = x(tF_s) = 2 \cos\left(2\pi \frac{1}{3} 75t\right) = 2 \cos(50\pi t).$$

Distorsiunea semnalului analogic original a fost determinată de efectul de alias, deoarece a fost utilizată o rată de eșantionare prea mică (mai mică decât dublul frecvenței semnalului analogic original).

Capitolul 2 – Sisteme discrete

Problema 4 – Caracterizarea sistemelor discrete: Se consideră un sistem discret LTI caracterizat în domeniul timp de ecuația cu diferențe finite:

$$y(n) - 5y(n-1) + 4y(n-2) = x(n) + x(n-1).$$

Se cere:

1. Să se determine ieșirea sistemului, $y(n)$, la secvența de intrare: $x(n) = (1/4)^n u(n)$, știind că $y(-2) = y(-1) = 1$;
2. Să se evalueze răspunsul la impuls $h(n)$.

1. Dorim să aflăm ieșirea sistemului, $y(n)$, $n \geq 0$, pentru un semnal de intrare dat $x(n)$, $n \geq 0$ și un set de condiții inițiale. Soluția totală are două componente: componenta omogenă și componenta particulară:

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n)$$

unde: $y_h(n)$ se numește soluție omogenă sau complementară, iar $y_p(n)$ se numește soluție particulară.

Soluția omogenă a ecuației cu diferențe finite. Vom începe cu rezolvarea ecuației liniare cu diferențe finite și coeficienți constanți (considerând că intrarea $x(n) = 0$). Astfel vom obține prima dată soluția ecuației cu diferențe finite omogene:

$$y(n) - 5y(n-1) + 4y(n-2) = 0.$$

Considerăm că soluția este de forma unei exponențiale, adică: $y_h(n) = \lambda^n$, unde indicele h folosit cu $y(n)$ este folosit pentru a menționa că este vorba de soluția omogenă a ecuației cu diferențe finite. Dacă substituim această soluție în ecuația omogenă, obținem ecuația polinomială:

$$\lambda^n - 5\lambda^{n-1} + 4\lambda^{n-2} = 0 \Leftrightarrow \lambda^{n-2} (\lambda^2 - 5\lambda + 4) = 0,$$

denumită și ecuație caracteristică, sau polinom caracteristic. Rădăcinile ecuației caracteristice sunt:

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 4 \end{cases}$$

Deoarece rădăcinile ecuației caracteristice sunt supraunitare în modul $|\lambda_i| > 1$, este vorba despre un sistem instabil. Având rădăcinile ecuației caracteristice, putem evalua soluția ecuației omogene, de forma:

$$y_h(n) = [C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n] u(n) = [C_1 (1)^n + C_2 (4)^n] u(n) = [C_1 + C_2 (4)^n] u(n)$$

unde C_1 și C_2 se numesc coeficienți de ponderare; se determină din condițiile inițiale.

Soluția particulară a ecuației cu diferențe finite. Soluția particulară, $y_p(n)$, trebuie să satisfacă ecuația cu diferențe finite inițială, pentru semnalul de intrare dat $x(n)$, $n \geq 0$. Cu alte cuvinte, $y_p(n)$ este orice soluția care satisface relația:

$$y_p(n) - 5y_p(n-1) + 4y_p(n-2) = x(n) + x(n-1).$$

Pentru $y_p(n)$ considerăm o formă ce depinde de forma semnalului de intrare, $x(n)$. Deoarece secvența de intrare considerată pentru acest sistem este produsul dintre o constantă 1 și o exponențială $(1/4)^n$, soluția particulară corespunzătoare ecuației neomogene, este:

$$y_p(n) = K \left(\frac{1}{4} \right)^n u(n),$$

unde K este un factor de scalare care satisface relația (în ecuația inițială):

$$K \left(\frac{1}{4} \right)^n u(n) - 5K \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} u(n-1) + 4K \left(\frac{1}{4} \right)^{n-2} u(n-1) = \left(\frac{1}{4} \right)^n u(n) + \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} u(n-1)$$

Probleme rezolvate

Pentru a determina valoarea lui K , trebuie să evaluăm ecuația anterioară pentru orice $n \geq 2$. Deci:

$$K\left(\frac{1}{4}\right)^n - 5K\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + 4K\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \cdot 4^n \Leftrightarrow K - 20K + 64K = 1 + 4 \Leftrightarrow 45K = 5 \Rightarrow K = \frac{1}{9}$$

Ca atare, soluția particulară a ecuației cu diferențe finite este:

$$\Rightarrow y_p(n) = \frac{1}{9} \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n).$$

Soluția totală a ecuației cu diferențe finite. Soluția totală, este suma dintre soluția omogenă și cea particulară, adică:

$$y(n) = \left[C_1 + C_2(4)^n + \frac{1}{9} \left(\frac{1}{4}\right)^n \right] u(n).$$

Constantele C_1 și C_2 se determină din condițiile inițiale $y(0)$ și $y(1)$:

$$n = 0 \quad y(0) = 5y(-1) - 4y(-2) + x(0) + x(-1) \Rightarrow y(0) = 5 - 4 + 1 = 2$$

$$n = 1 \quad y(1) = 5y(0) - 4y(-1) + x(1) + x(0) \Rightarrow y(1) = 10 - 4 + \frac{1}{4} + 1 = \frac{29}{4}$$

Având condițiile inițiale $y(0) = 2$ și $y(1) = 29/4$, putem afla constantele C_1 și C_2 :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + \frac{1}{9} = 2 \\ C_1 + 4C_2 + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{4} = \frac{29}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{17}{9} \\ C_1 + 4C_2 = \frac{65}{9} \cdot (-1) \end{cases} +$$

$$\begin{cases} / -3C_2 = \frac{17}{9} - \frac{65}{9} = -\frac{16}{3} \\ C_1 + C_2 = \frac{17}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = \frac{16}{9} \\ C_1 = \frac{17}{9} - \frac{16}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{1}{9} \\ C_2 = \frac{16}{9} \end{cases}$$

Ieșirea sistemului este:

$$y(n) = \left[\underbrace{\frac{1}{9} + \frac{16}{9}(4)^n}_{y_{zi}(n)} + \underbrace{\frac{1}{9} \left(\frac{1}{4}\right)^n}_{y_{zs}(n)} \right] u(n),$$

unde $y_{zi}(n)$ este răspunsul sistemului la intrarea zero – contribuția sistemului (răspuns natural/răspuns liber), iar $y_{zs}(n)$ este răspunsul sistemului în condiții inițiale nule – contribuția intrării (răspuns forțat).

2. **Răspunsul la impuls** îl obținem considerând ca semnal de intrare impulsul unitate:

$$x(n) = \delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & \text{in rest} \end{cases} \Rightarrow y(n) = h(n)$$

$$\Rightarrow x(n) = 0, \quad \forall n > 0 \quad \Rightarrow y_p(n) = h_p(n) = 0$$

Răspunsul la impuls va avea doar componenta omogenă, adică:

$$h(n) = [D_1 \lambda_1^n + D_2 \lambda_2^n] u(n) = [D_1 + D_2 (4)^n] u(n),$$

unde λ_1 și λ_2 sunt rădăcinile ecuației caracteristice, determinate anterior.

Considerăm că sistemul este cauzal ($h(n) = 0, \forall n < 0$) și evaluăm condițiile inițiale:

$$\begin{aligned} n = 0 \quad h(0) &= 5h(-1) - 4h(-2) + \delta(0) + \delta(-1) \Rightarrow h(0) = 1 \\ n = 1 \quad h(1) &= 5h(0) - 4h(-1) + \delta(1) + \delta(0) \Rightarrow h(1) = 5 + 1 = 6 \end{aligned} \Rightarrow \text{C.I.} \begin{cases} h(0) = 1 \\ h(1) = 6 \end{cases}$$

Probleme rezolvate

Evaluăm coeficienții D_1 și D_2 :

$$\begin{cases} D_1 + D_2 = 1 \\ D_1 + 4D_2 = 6 \end{cases} \begin{matrix} | \cdot (-1) \\ + \end{matrix}$$

$$\begin{cases} / & 3D_2 = 5 \\ D_1 + D_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D_2 = \frac{5}{3} \\ D_1 = 1 - \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D_1 = -\frac{2}{3} \\ D_2 = \frac{5}{3} \end{cases}$$

Răspunsul sistemului la impuls este:

$$h(n) = \left[-\frac{2}{3} + \frac{5}{3}(4)^n \right] u(n).$$

Problema 5 – Răspunsul la impuls și ecuația de intrare-ieșire: Se consideră un sistem cauzal care

produce la ieșire secvența $y(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ \frac{5}{6}, & n = 1, \\ 0, & \text{in rest,} \end{cases}$ la excitația $x(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ -\frac{5}{6}, & n = 1, \\ \frac{1}{6}, & n = 2, \\ 0, & \text{in rest.} \end{cases}$

Se dorește determinarea răspunsului la impuls, $h(n)$, și a ecuației cu diferențe finite și coeficienți constanți corespunzătoare.

Aplicăm transformata în z secvenței de ieșire:

$$Y(z) = 1 + \frac{5}{6}z^{-1}.$$

Transformata în z corespunzătoare secvenței de la intrare este:

$$X(z) = 1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}.$$

Având transformatele în z corespunzătoare secvențelor de intrare, respectiv de ieșire, putem evalua funcția de transfer:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + \frac{5}{6}z^{-1}}{1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}} = \frac{1 + \frac{5}{6}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

Deoarece sistemul este cauzal, regiunea sa de convergență este $|z| > 1/2$. Sistemul este stabil, deoarece polii se află în interiorul cercului unitate.

Ecuația cu diferențe finite și coeficienți constanți este:

$$y(n) = \frac{5}{6}y(n-1) - \frac{1}{6}y(n-2) + x(n) + \frac{5}{6}x(n-1)$$

Răspunsul la impuls se obține aplicând transformata în z inversă funcției de sistem. În prealabil trebuie să descompunem funcția de transfer în fracții simple, de forma:

$$H(z) = \frac{A_1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$\Rightarrow A_1 \Big|_{z^{-1}=2} = \frac{1 + \frac{5}{6} \cdot 2}{1 - \frac{1}{2} \cdot 2} = 8 \qquad \Rightarrow A_2 \Big|_{z^{-1}=3} = \frac{1 + \frac{5}{6} \cdot 3}{1 - \frac{1}{3} \cdot 3} = -7$$

Probleme rezolvate

Având coeficienții A_1 și A_2 , putem scrie expresia funcției de transfer descompusă în fracții simple:

$$H(z) = \frac{8}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{7}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}.$$

În consecință, răspunsul la impuls va fi:

$$h(n) = Z^{-1}\{H(z)\} = \left[8\left(\frac{1}{2}\right)^n - 7\left(\frac{1}{3}\right)^n \right] u(n).$$

Problema 6 – Evaluarea ieșirii, cunoscând răspunsul la impuls și excitația: Se dorește determinarea secvenței de la ieșirea sistemului care are răspunsul la impuls:

$$h(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n), \quad n \in \mathbb{Z},$$

dacă semnalul de la intrarea este: $x(n) = 3e^{j\frac{\pi}{3}n}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Răspunsul în frecvență al acestui sistem este:

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n e^{-j\omega n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}}.$$

Pentru $\omega = \pi/3$, funcția răspuns în frecvență devine:

$$H\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\frac{\pi}{3}}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} - j\sin\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{6(5 - j\sqrt{3})}{(5 + j\sqrt{3})(5 - j\sqrt{3})} = 0.357 - j0.371,$$

iar modulul, respectiv faza sunt date de relațiile:

$$\left|H\left(\frac{\pi}{3}\right)\right| = \sqrt{0.357^2 + (-0.371)^2} = 0.514, \quad \angle H\left(\frac{\pi}{3}\right) = \arctan\left(\frac{-0.371}{0.357}\right) = -46.1^\circ.$$

Secvența de ieșire se evaluează cu ajutorul relației (2.10): $y(n) = AH(\omega_0)e^{j\omega_0 n}$, adică

$$y(n) = 3H\left(\frac{\pi}{3}\right)e^{j\frac{\pi}{3}n} = 3\left|H\left(\frac{\pi}{3}\right)\right|e^{j\frac{\pi}{3}n + \angle H\left(\frac{\pi}{3}\right)} = 3 \cdot 0.514 \cdot e^{j\frac{\pi}{3}n - 46.1^\circ} = 1.542e^{j\frac{\pi}{3}n - 46.1^\circ}$$

Se observă că singurul efect al sistemului asupra semnalului de intrare constă în scalarea amplitudinii cu 0.514 și defazarea cu 46.1° . Semnalul de ieșire este în acest caz o exponențială complexă cu frecvența $\pi/3$, amplitudine 1.542 și fază 46.1° .

Problema 7 – Ieșirea unui sistem LTI la o excitație exponențială: Acest exemplu are ca scop determinarea răspunsului la secvența de intrare:

$$x(n) = 9^n u(n),$$

pentru sistemul descris de ecuația cu diferențe finite și coeficienți constanți:

$$y(n) = 0.9y(n-1) - 0.81y(n-2) + x(n),$$

știind că:

$$1. \quad y(-1) = y(-2) = 0;$$

$$2. \quad y(-1) = y(-2) = 1;$$

utilizând transformata în z .

Funcția de sistem corespunzătoare ecuației cu diferențe finite și coeficienți constanți este:

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.9z^{-1} + 0.81z^{-2}}.$$

Cei doi poli corespunzătorii lui $H(z)$: $p_{1,2} = 0.9e^{\pm j\frac{\pi}{3}}$, au valori complex-conjugate.

Probleme rezolvate

Transformata în z corespunzătoare secvenței de intrare este:

$$X(z) = Z\{4^n u(n)\} = \frac{1}{1-9z^{-1}}.$$

Răspunsul de stare zero al sistemului, în domeniul z este:

$$Y_{zs}(z) = H(z)X(z) = \frac{1}{\left(1-0.9e^{j\frac{\pi}{3}}z^{-1}\right)\left(1-0.9e^{-j\frac{\pi}{3}}z^{-1}\right)\left(1-9z^{-1}\right)}.$$

Pentru a afla răspunsul forțat în domeniul timp, vom descompune $Y_{zs}(z)$ în fracții simple și apoi aplicăm transformata în z inversă:

$$Y_{zs}(z) = \frac{A_1}{1-0.9e^{j\frac{\pi}{3}}z^{-1}} + \frac{A_2}{1-0.9e^{-j\frac{\pi}{3}}z^{-1}} + \frac{A_3}{1-9z^{-1}}$$

Evaluând pentru $z^{-1} = \frac{1}{0.9e^{j\frac{\pi}{3}}}$ obținem coeficientul A_1 :

$$\begin{aligned} A_1 \Big|_{z^{-1} = \frac{1}{0.9e^{j\frac{\pi}{3}}}} &= \frac{1}{\left(1-0.9e^{-j\frac{\pi}{3}} \frac{1}{0.9e^{j\frac{\pi}{3}}}\right)\left(1-\frac{9}{0.9e^{j\frac{\pi}{3}}}\right)} = \frac{1}{\left(1-e^{-j\frac{2\pi}{3}}\right)\left(1-10e^{-j\frac{\pi}{3}}\right)} \\ &= \frac{1}{\left[1-\left(\cos\frac{2\pi}{3}-j\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]\left[1-10\left(\cos\frac{\pi}{3}-j\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]} = \frac{1}{\left[1-\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]\left[1-10\left(\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]} \\ &= \frac{2}{(3+j\sqrt{3})(-4+j5\sqrt{3})} = \frac{2}{-27+j11\sqrt{3}} = \frac{2(-27-j11\sqrt{3})}{(-27+j11\sqrt{3})(-27-j11\sqrt{3})} = \frac{-54-j38.105}{1092} \\ &\Rightarrow A_1 = -0.0495 - j0.0349. \end{aligned}$$

Deoarece polii p_1 și p_2 au valori complex-conjugate, și coeficienții A_1 și A_2 vor avea valori complex-conjugate, adică:

$$A_2 = A_1^* = -0.0495 + j0.0349.$$

Evaluând pentru $z^{-1} = 1$ obținem coeficientul A_3 :

$$\begin{aligned} A_3 \Big|_{z^{-1} = 1} &= \frac{1}{1-0.9\frac{1}{9}+0.81\frac{1}{81}} = \frac{1}{0.91} \Rightarrow A_3 = 1.0989. \\ \Rightarrow Y_{zs}(z) &= \frac{-0.0495 - j0.0349}{1-0.9e^{j\frac{\pi}{3}}z^{-1}} + \frac{-0.0495 + j0.0349}{1-0.9e^{-j\frac{\pi}{3}}z^{-1}} + \frac{1.0989}{1-9z^{-1}}. \end{aligned}$$

În consecință, răspunsul de stare zero al sistemului este:

$$\begin{aligned} y_{zs}(n) &= \left[(-0.0495 - j0.0349) \left(0.9e^{j\frac{\pi}{3}}\right)^n + (-0.0495 + j0.0349) \left(0.9e^{-j\frac{\pi}{3}}\right)^n + 1.0989(9)^n \right] u(n) \\ &= \left[-0.0495(0.9)^n \left(e^{j\frac{\pi}{3}n} + e^{-j\frac{\pi}{3}n} \right) - j0.0349(0.9)^n \left(e^{j\frac{\pi}{3}n} - e^{-j\frac{\pi}{3}n} \right) + 1.0989(9)^n \right] u(n) \\ &= \left[-0.099(0.9)^n \cos\frac{\pi n}{3} + 0.0698(0.9)^n \sin\frac{\pi n}{3} + 1.0989(9)^n \right] u(n) \\ &= \left[(0.9)^n \left(-0.099 \cos\frac{\pi n}{3} + 0.0698 \sin\frac{\pi n}{3} \right) + 1.0989(9)^n \right] u(n) \end{aligned}$$

Folosind identitatea trigonometrică: $a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos\left(x - \arctan\frac{b}{a}\right)$, obținem:

Probleme rezolvate

$$\begin{aligned}
 y_{zs}(n) &= \left\{ (0.9)^n \sqrt{(-0.099)^2 + 0.0698^2} \cos \left[\frac{\pi}{3}n - \arctan \left(\frac{0.0698}{-0.099} \right) \right] + 1.0989(9)^n \right\} u(n) \\
 &= \left[(0.9)^n 0.1211 \cos \left(\frac{\pi}{3}n + \arctan 0.705 \right) + 1.0989(9)^n \right] u(n) \\
 &= \left[(0.9)^n 0.1211 \cos \left(\frac{\pi}{3}n + 35.1858^\circ \right) + 1.0989(9)^n \right] u(n) \\
 &\Rightarrow y_{zs}(n) = \left[0.1211(0.9)^n \cos \left(\frac{\pi}{3}n + 35.1858^\circ \right) + 1.0989(9)^n \right] u(n).
 \end{aligned}$$

1. Deoarece condițiile inițiale sunt nule, ieșirea sistemului va fi:

$$y(n) = y_{zs}(n) = \left[0.1211(0.9)^n \cos \left(\frac{\pi}{3}n + 35.1558^\circ \right) + 1.0989(9)^n \right] u(n)$$

2. În acest caz condițiile inițiale sunt nenule, $y(-1) = y(-2) = 1$, și vom avea încă o componentă la transformata în z (transformata în z a răspunsului când intrarea este nulă):

$$Y_{zi}(z) = \frac{-\sum_{k=1}^N a_k z^{-k} \sum_{n=1}^k y(-n) z^n}{A(z)} = \frac{0.09 - 0.81z^{-1}}{1 - 0.9z^{-1} + 0.81z^{-2}} = \frac{D_1}{1 - 0.9e^{j\frac{\pi}{3}}z^{-1}} + \frac{D_2}{1 - 0.9e^{-j\frac{\pi}{3}}z^{-1}}$$

Evaluăm constantele D_1 și D_2 :

$$\begin{aligned}
 D_1 \Big|_{z^{-1} = \frac{1}{0.9e^{j\frac{\pi}{3}}}} = D_2^* &= \frac{0.09 - 0.81 \frac{1}{0.9e^{j\frac{\pi}{3}}}}{1 - 0.9e^{-j\frac{\pi}{3}} \frac{1}{0.9e^{j\frac{\pi}{3}}}} = \frac{0.09 - 0.9e^{-j\frac{\pi}{3}}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{3}}} = \frac{0.09 - 0.9 \left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{1 - \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)} \\
 &= \frac{-0.72 + j0.9\sqrt{3}}{3 + j\sqrt{3}} = \frac{(-0.72 + j0.9\sqrt{3})(3 - j\sqrt{3})}{(3 + j\sqrt{3})(3 - j\sqrt{3})} = \frac{0.54 + j3.42\sqrt{3}}{9 + 3} = \frac{0.54 + j5.9236}{12} \\
 &\Rightarrow D_1 = 0.045 + j0.4936 \quad \Rightarrow D_2 = 0.045 - j0.4936 \\
 &\Rightarrow Y_{zi}(z) = \frac{0.045 + j0.4936}{1 - 0.9e^{j\frac{\pi}{3}}z^{-1}} + \frac{0.045 - j0.4936}{1 - 0.9e^{-j\frac{\pi}{3}}z^{-1}}
 \end{aligned}$$

În consecință, răspunsul la intrare zero este:

$$\begin{aligned}
 y_{zi}(n) &= \left[(0.045 + j0.4936) \left(0.9e^{j\frac{\pi}{3}} \right)^n + (0.045 - j0.4936) \left(0.9e^{-j\frac{\pi}{3}} \right)^n \right] u(n) \\
 &= \left[0.045(0.9)^n \left(e^{j\frac{\pi}{3}n} + e^{-j\frac{\pi}{3}n} \right) + j0.4936(0.9)^n \left(e^{j\frac{\pi}{3}n} - e^{-j\frac{\pi}{3}n} \right) \right] u(n) \\
 &= \left[0.09(0.9)^n \cos \frac{\pi n}{3} - 0.9872(0.9)^n \sin \frac{\pi n}{3} + 1.0989 \right] u(n) \\
 &= \left[(0.9)^n \sqrt{0.09^2 + (-0.9872)^2} \cos \left[\frac{\pi}{3}n - \arctan \left(\frac{-0.9872}{0.09} \right) \right] \right] u(n) = \\
 &= \left[(0.9)^n 0.9913 \cos \left(\frac{\pi}{3}n + \arctan 10.9689 \right) \right] u(n) = \left[(0.9)^n 0.9913 \cos \left(\frac{\pi}{3}n + 84.79^\circ \right) \right] u(n) \\
 &\Rightarrow y_{zi}(n) = \left[0.9913(0.9)^n \cos \left(\frac{\pi}{3}n + 84.79^\circ \right) \right] u(n).
 \end{aligned}$$

Răspunsul total are transformata în z :

$$Y(z) = Y_{zs}(z) + Y_{zi}(z) = \frac{-0.0045 + j0.4587}{1 - 0.9e^{j\frac{\pi}{3}}z^{-1}} + \frac{-0.0045 - j0.4587}{1 - 0.9e^{-j\frac{\pi}{3}}z^{-1}} + \frac{1.0989}{1 - 9z^{-1}}$$

Probleme rezolvate

Aplicând transformata în z inversă răspunsului total din domeniul z , obținem ieșirea sistemului:

$$\begin{aligned}
 y(n) &= \left[(-0.0045 + j0.4587)(0.9)^n e^{j\frac{\pi}{3}n} + (-0.0045 - j0.4587)(0.9)^n e^{-j\frac{\pi}{3}n} + 1.0989(9)^n \right] u(n) \\
 &= \left[-0.0045(0.9)^n \left(e^{j\frac{\pi}{3}n} + e^{-j\frac{\pi}{3}n} \right) + j0.4587(0.9)^n \left(e^{j\frac{\pi}{3}n} - e^{-j\frac{\pi}{3}n} \right) + 1.0989(9)^n \right] u(n) \\
 &= \left[-0.009(0.9)^n \cos\frac{\pi n}{3} - 0.9174(0.9)^n \sin\frac{\pi n}{3} + 1.0989(9)^n \right] u(n) \\
 &= \left[(0.9)^n \sqrt{(-0.009)^2 + (-0.9174)^2} \cos\left(\frac{\pi n}{3} - \arctan\frac{-0.9174}{-0.009}\right) + 1.0989(9)^n \right] u(n) \\
 &= \left[(0.9)^n 0.9174 \cos\left(\frac{\pi n}{3} - \arctan 101.93\right) + 1.0989(9)^n \right] u(n) \\
 &= \left[(0.9)^n 0.9174 \cos\left(\frac{\pi n}{3} - 89.438^\circ\right) + 1.0989(9)^n \right] u(n) \\
 \Rightarrow y(n) &= \left[(0.9)^n 0.9174 \cos\left(\frac{\pi n}{3} - 89.438^\circ\right) + 1.0989(9)^n \right] u(n)
 \end{aligned}$$

Problema 8 – Evaluarea răspunsului la impuls și a regiunii de convergență: Se consideră un sistem LTI este caracterizat de funcția de transfer:

$$H(z) = \frac{3 - 4z^{-1}}{1 - 3.5z^{-1} + 1.5z^{-2}}.$$

Să se specifice regiunea de convergență a lui $H(z)$ și să se determine răspunsul la impuls, $h(n)$, în următoarele condiții:

1. Sistemul este stabil;
2. Sistemul este cauzal;
3. Sistemul este pur necauzal.

Pentru a putea evalua răspunsul la impuls, trebuie descompus $H(z)$ în fracții simple. Polii sistemului sunt $p_1 = \frac{1}{2}$ și $p_2 = 3$.

$$H(z) = \frac{A_1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - 3z^{-1}}$$

$$\Rightarrow A_1|_{z^{-1}=2} = \frac{3 - 4 \cdot 2}{1 - 3 \cdot 2} = 1 \qquad \Rightarrow A_2|_{z^{-1}=\frac{1}{3}} = \frac{3 - 4 \cdot \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 2$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{2}{1 - 3z^{-1}}$$

1. Deoarece sistemul este stabil, regiunea de convergență trebuie să includă cercul unitate, deci $1/2 < |z| < 3$. În consecință, răspunsul la impuls este necauzal:

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - 2(3)^n u(-n-1).$$

2. Deoarece sistemul este cauzal, $|z| > 3$, iar

$$h(n) = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2(3)^n \right] u(n).$$

Probleme rezolvate

Sistemul este instabil, deoarece conține $(3)^n u(n)$.

3. Dacă sistemul este pur necauzal, regiunea de convergență este $|z| < 1/2$, și

$$h(n) = - \left[\left(\frac{1}{2} \right)^n + 2(3)^n \right] u(-n-1).$$

Sistemul este instabil, deoarece conține $\left(\frac{1}{2} \right)^n u(-n-1)$.

Problema 9 – Evaluarea convoluției liniare: Acest exemplu urmărește evaluarea ieșirii unui sistem, cu ajutorul convoluției liniare dintre secvența de la intrarea sistemului și răspunsul la impuls al acestuia.

Se consideră secvența de intrare: $x(n) = \{1, 2, 3, 4\}$ și răspunsul la impuls: $h(n) = \{1, -1, 1, -2\}$.

Convoluția liniară va fi evaluată prima dată folosind metoda grafică, apoi utilizând transformata în z .

Metoda 1. Evaluarea convoluției liniare cu metoda grafică

Reprezentăm grafic cele două secvențe, $h(k)$ și $x(k)$ (figura 2.16. a)), folosind k drept indice, pentru a fi în acord cu relația (2.15).

Realizăm simetrica secvenței $h(k)$, obținem secvența $h(-k)$ și o reprezentăm grafic (figura 2.16. b)); acum putem evalua ieșirea la momentul $n = 0$, conform relației (2.15), adică

$$y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(-k).$$

Secvența produs $v_0(k) \equiv x(k)h(-k)$ este de asemenea reprezentată grafic în figura 2.16. b). Adunând

toți termenii secvenței produs, obținem $y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_0(k) = 1$.

Continuăm calculul evaluând ieșirea pentru $n < 0$, de exemplu la $n = -1$. Pentru aceasta, translatăm secvența $h(-k)$ cu 1 eșantion, spre stânga (figura 2.16. c)). Conform relației (2.15)

$$y(-1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(-1-k).$$

Secvența produs $v_{-1}(k) \equiv x(k)h(-1-k)$ este de asemenea reprezentată grafic în figura 2.16. c).

Adunând toți termenii secvenței produs, obținem $y(-1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_{-1}(k) = 0$.

Observăm că dacă continuăm să translatăm secvența $h(-1-k)$, spre stânga, secvențele produs obținute vor avea toate eșantioanele nule. Ca atare, putem spune că $y(n) = 0$, $n \leq -1$.

Evaluăm acum ieșirea, $y(n)$, pentru $n > 0$. Începem cu $n = 1$. Pentru aceasta, translatăm secvența $h(-k)$ cu 1 eșantion, spre dreapta, și obținem secvența $h(1-k)$ (figura 2.16. d)). Conform relației (2.15)

$$y(1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(1-k).$$

Secvența produs $v_1(k) \equiv x(k)h(1-k)$ este de asemenea reprezentată grafic în figura 2.16. d). Adunând

toți termenii secvenței produs, obținem $y(1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_1(k) = -1 + 2 = 1$.

În mod similar obținem secvența $y(2)$, translatând $h(-k)$ cu 2 eșantioane, spre dreapta (figura 2.16. e)). Secvența produs $v_2(k) \equiv x(k)h(2-k)$ este de asemenea reprezentată grafic în figura 2.16. e).

Adunând toți termenii secvenței produs, obținem $y(2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_2(k) = 1 - 2 + 3 = 2$.

Probleme rezolvate

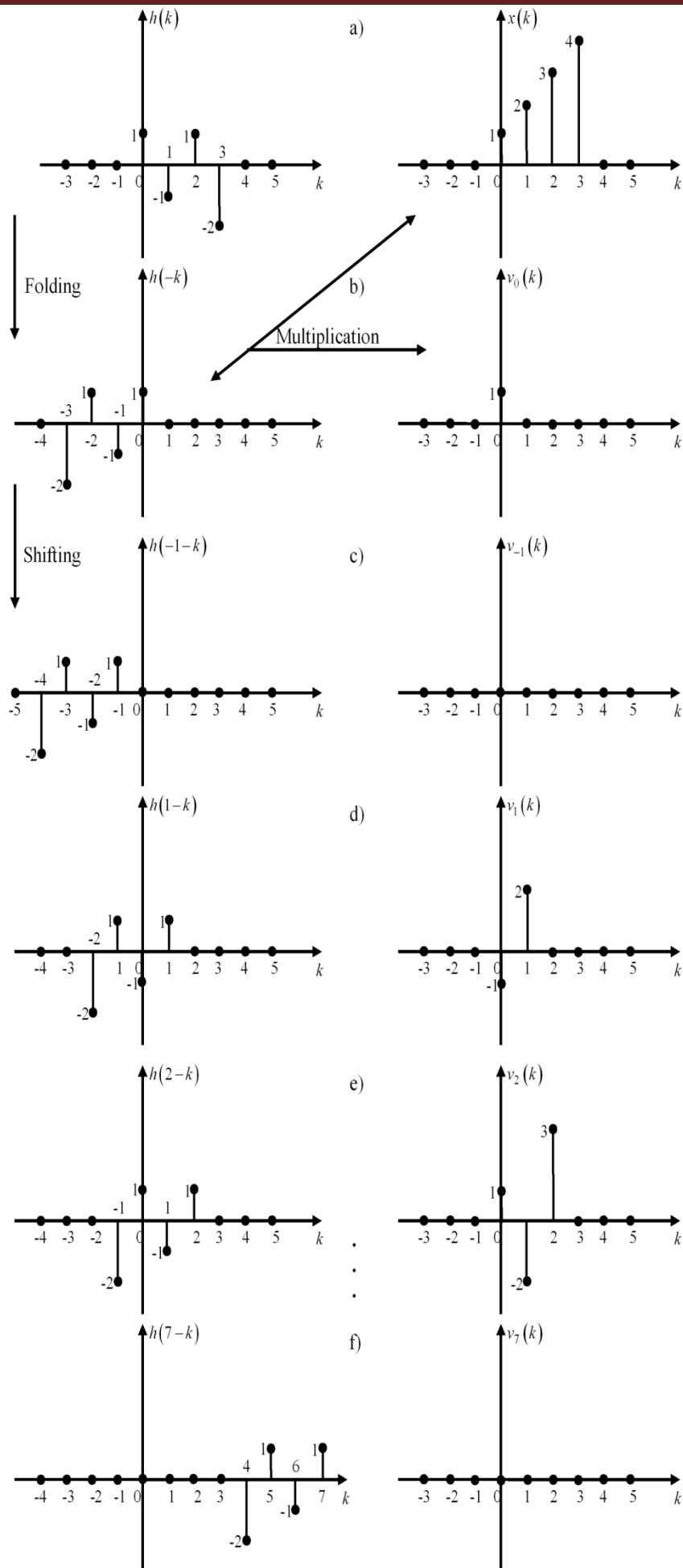


Figura 2.16. Evaluarea convoluției liniare, folosind metoda grafică

Probleme rezolvate

Translatând în continuare secvența $h(-k)$ cu 3, 4, ... eşantioane, spre dreapta, înmulțind secvențele corespunzătoare și adunând valorile secvențelor produs rezultate, obținem $y(3)=1$, $y(4)=-5$, $y(5)=-2$, $y(6)=-8$. Pentru $n > 6$, obținem $y(n)=0$, deoarece secvențele produs corespunzătoare au valori nule.

Acum avem întregul răspuns al sistemului pentru $-\infty < n < \infty$:

$$y(n) = \left\{ \dots, 0, \underset{\uparrow}{1}, 1, 2, 1, -5, -2, -8, 0, \dots \right\}.$$

Metoda 2. Evaluarea convoluției liniare cu ajutorul transformatei în z

$$Z\{x(n)\} = X(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3},$$

$$Z\{h(n)\} = H(z) = 1 - z^{-1} + z^{-2} - 2z^{-3},$$

$$\begin{aligned} Y(z) &= X(z)H(z) = (1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3})(1 - z^{-1} + z^{-2} - 2z^{-3}) = \\ &= 1 - z^{-1} + z^{-2} - 2z^{-3} + \\ &\quad + 2z^{-1} - 2z^{-2} + 2z^{-3} - 4z^{-4} + \\ &\quad + 3z^{-2} - 3z^{-3} + 3z^{-4} - 6z^{-5} + \\ &\quad + 4z^{-3} - 4z^{-4} + 4z^{-5} - 8z^{-6} = \\ &= 1 + z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3} - 5z^{-4} - 2z^{-5} - 8z^{-6}. \end{aligned}$$

Rezultă

$$Z^{-1}\{Y(z)\} = y(n) = \left\{ \underset{\uparrow}{1}, 1, 2, 1, -5, -2, -8 \right\}.$$

Problema 10 – Evaluarea ieșirii unisistem cu ajutorul convoluției liniare: Se urmărește determinarea ieșirii $y(n)$ a unui sistem LTI relaxat, al cărui răspuns la impuls este:

$$h(n) = a^n u(n), \quad |a| < 1,$$

la treapta unitate $x(n) = u(n)$.

În acest caz, atât $h(n)$ cât și $x(n)$ sunt secvențe de durată infinită. Vom folosi formula de convoluție dată de relația (2.14):

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k),$$

unde secvența reflectată este $x(k)$.

- pentru $n = 0$ avem: $y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k u(k)u(-k) = a^0 = 1$.
- pentru $n = 1$ avem: $y(1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(1-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k u(k)u(1-k) = a^0 + a = 1 + a$.
- pentru $n = 2$ avem: $y(2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(2-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k u(k)u(2-k) = a^0 + a + a^2 = 1 + a + a^2$.

Se observă că pentru $n > 0$, ieșirea este

$$y(n) = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}, \quad n > 0.$$

Pe de altă parte, pentru $n < 0$, secvențele produs vor avea doar valori nule, deci $y(n) = 0$, $n < 0$.

Pentru $n \rightarrow \infty$, ieșirea este

$$y(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1}{1 - a}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Probleme rezolvate

În concluzie, ieșirea sistemului LTI este:

$$y(n) = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ 1, & n = 0, \\ \frac{1-a^{n+1}}{1-a}, & n > 0, \\ \frac{1}{1-a}, & n \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Problema 11 – Evaluarea răspunsului folosind convoluția liniară: Se urmărește evaluarea convoluției liniare dintre:

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \text{ și } h(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n).$$

În acest caz, atât $h(n)$ cât și $x(n)$ sunt secvențe de durată infinită. Vom folosi formula de convoluție dată de relația (2.14)

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k),$$

unde secvența reflectată este $h(k)$. Secvența produs va fi:

$$v_n(k) = x(k)h(n-k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k},$$

care are valori nenule pentru $k \geq 0$ și $n-k \geq 0$ sau $n \geq k \geq 0$.

Pentru $n < 0$, $v_n(k) = 0$, $\forall k$, deci

$$y(n) = 0, \quad n < 0.$$

Pentru $n \geq k \geq 0$ suma valorilor secvenței produs $v_n(k)$ va fi:

$$y(n) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} = \left(\frac{1}{4}\right)^n \sum_{k=0}^n 2^k = \left(\frac{1}{4}\right)^n (2^{n+1} - 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right], \quad n \geq 0$$

Pentru $n \rightarrow \infty$, ieșirea este:

$$y(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

În concluzie, ieșirea sistemului LTI este:

$$y(n) = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(2 - \frac{1}{2^n}\right), & n \geq 0. \end{cases}$$

Capitolul 3 – Transformata Fourier Discretă

Problema 12 – evaluarea DFT-ului: Acest exemplu urmărește evaluarea transformatei Fourier discrete a unei secvențe date. Se consideră o secvență de lungime 4:

$$x(n) = \{1, 2, 3, 4\},$$

pentru care se dorește evaluarea DFT-ului în 8 puncte.

Pentru a evalua DFT în 8 puncte, secvența trebuie să aibă 8 valori. Vom adăuga zerouri, astfel încât secvența $x(n)$ să aibă lungime 8. Obținem

$$x(n) = \{1, 2, 3, 4, 0, 0, 0, 0\}$$

Probleme rezolvate

Începem cu evaluarea ponderilor

$$W_N^k = W_8^k = e^{-j\frac{2\pi}{8}k} = e^{-j\frac{\pi}{4}k}, \quad k = \overline{0,7}.$$

Ținând cont de condiția de simetrie $W_N^{k+N/2} = -W_N^k$, în cazul acestui exemplu

$$W_8^7 = -W_8^3, \quad W_8^6 = -W_8^2, \quad W_8^5 = -W_8^1, \quad W_8^4 = -W_8^0,$$

avem:

$$\begin{aligned} W_8^0 &= e^{-j\frac{\pi}{4} \cdot 0} = 1 \\ W_8^1 &= e^{-j\frac{\pi}{4}} = \cos \frac{\pi}{4} - j \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - j \frac{\sqrt{2}}{2} \\ W_8^2 &= e^{-j\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} - j \sin \frac{\pi}{2} = -j \\ W_8^3 &= e^{-j\frac{3\pi}{4}} = \cos \frac{3\pi}{4} - j \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - j \frac{\sqrt{2}}{2} \\ W_8^4 &= -W_8^0 = -1 \\ W_8^5 &= -W_8^1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2} \\ W_8^6 &= -W_8^2 = j \\ W_8^7 &= -W_8^3 = \frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Având calculate rădăcinile unității, putem continua cu evaluarea lui $X(k)$, $k = \overline{0,7}$, considerând relația (3.1), adică

$$X(k) = \sum_{n=0}^7 x(n) W_8^{kn}, \quad k = \overline{0, N-1}$$

$$\begin{aligned} X(k) &= x(0)W_8^{k0} + x(1)W_8^{k1} + x(2)W_8^{k2} + x(3)W_8^{k3} + x(4)W_8^{k4} + x(5)W_8^{k5} + x(6)W_8^{k6} + x(7)W_8^{k7} \\ &= W_8^0 + 2W_8^k + 3W_8^{2k} + 4W_8^{3k} \end{aligned}$$

și ținând cont de condiția de periodicitate $W_N^{k+N} = W_N^k$, în acest caz $W_8^{k+8} = W_8^k$.

$$X(0) = W_8^0 + 2W_8^0 + 3W_8^0 + 4W_8^0 = 10W_8^0 = 10$$

$$X(1) = W_8^0 + 2W_8^1 + 3W_8^2 + 4W_8^3 = 1 + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 3j - 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -(\sqrt{2}-1) - 3j(\sqrt{2}+1)$$

$$X(2) = W_8^0 + 2W_8^2 + 3W_8^4 + 4W_8^6 = W_8^0 + 2W_8^2 - 3W_8^0 - 4W_8^2 = -2(W_8^0 + W_8^2) = -2(1-j) = -2 + 2j$$

$$\begin{aligned} X(3) &= W_8^0 + 2W_8^3 + 3W_8^6 + 4W_8^9 = W_8^0 + 2W_8^3 - 3W_8^2 + 4W_8^1 = 1 - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 3j + 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= 1 + \sqrt{2} - 3j(\sqrt{2}-1) \end{aligned}$$

$$X(4) = W_8^0 + 2W_8^4 + 3W_8^8 + 4W_8^{12} = W_8^0 - 2W_8^0 + 3W_8^0 - 4W_8^0 = -2W_8^0 = -2$$

$$\begin{aligned} X(5) &= W_8^0 + 2W_8^5 + 3W_8^{10} + 4W_8^{15} = W_8^0 - 2W_8^1 + 3W_8^2 - 4W_8^3 = 1 - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 3j + 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= 1 + \sqrt{2} + 3j(\sqrt{2}-1) \end{aligned}$$

$$X(6) = W_8^0 + 2W_8^6 + 3W_8^{12} + 4W_8^{18} = W_8^0 - 2W_8^2 - 3W_8^0 + 4W_8^2 = -2W_8^0 + 2W_8^2 = -2 - 2j$$

$$\begin{aligned} X(7) &= W_8^0 + 2W_8^7 + 3W_8^{14} + 4W_8^{21} = W_8^0 - 2W_8^3 - 3W_8^2 - 4W_8^1 = 1 + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 3j - 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= -(\sqrt{2}-1) + 3j(\sqrt{2}+1) \end{aligned}$$

Probleme rezolvate

Acum putem evalua modulul și faza pentru $X(k)$, $k = \overline{0,7}$.

Indicație:

$$|a + jb| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \angle(a + jb) = \begin{cases} \arctan \frac{b}{a}, & a > 0 \\ \pi + \arctan \frac{b}{a}, & a < 0 \end{cases},$$

iar valorile fazei trebuie reprezentate în domeniul $(-\pi, \pi]$.

$$|X(0)| = 10, \quad \angle X(0) = 0$$

$$|X(1)| = \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2 + [3(\sqrt{2} + 1)]^2} = 7.2545$$

$$\angle X(1) = \pi + \arctan \left[\frac{-3(\sqrt{2} + 1)}{-(\sqrt{2} - 1)} \right] = \pi + 1.5137 = 4.6553 \quad (-2\pi = -1.6279)$$

$$|X(2)| = \sqrt{4 + 4} = 2.8284, \quad \angle X(2) = \pi + \arctan \left(\frac{2}{-2} \right) = \pi - 0.7854 = 2.3562$$

$$|X(3)| = \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2 + [3(\sqrt{2} - 1)]^2} = 2.7153, \quad \angle X(3) = -\arctan \left[\frac{3(\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} + 1)} \right] = -0.4754$$

$$|X(4)| = 2, \quad \angle X(4) = \pi - 0 = \pi$$

$$|X(5)| = \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2 + [3(\sqrt{2} - 1)]^2} = |X(3)| = 2.7153, \quad \angle X(5) = -\angle X(3) = 0.4754$$

$$|X(6)| = |X(2)| = 2.8284, \quad \angle X(6) = -\angle X(2) = -2.3562$$

$$|X(7)| = |X(1)| = 7.2545, \quad \angle X(7) = -\angle X(1) = 1.6279$$

$$|X(k)| = \{10, 7.2545, 2.8284, 2.7153, 2, 2.7153, 2.8284, 7.2545\}$$

$$\angle X(k) = \{0, -1.6279, 2.3562, -0.4754, 3.1416, 0.4754, -2.3562, 1.6279\}$$

Problema 13 – Convoluția circulară: Acest exemplu urmărește evaluarea ieșirii unui sistem, cu ajutorul convoluției circulare dintre secvența de la intrarea sistemului și răspunsul la impuls al acestuia.

Se consideră secvența de intrare: $x(n) = \{1, 2, 3, 4\}$ și răspunsul la impuls $h(n) = \{1, -1, 1, -2\}$.

Convoluția circulară va fi evaluată prima dată folosind metoda grafică, apoi utilizând transformata Fourier discretă.

Metoda 1. Evaluarea convoluției circulare cu metoda grafică

Fiecare secvență conține 4 valori nenule. Pentru ilustrarea operațiilor care apar la evaluarea convoluției circulare, vom desena fiecare secvență ca puncte ale unui cerc. Reprezentarea secvențelor $h(k)$ și $x(k)$ este ilustrată în figura 3.8. a). Menționăm că secvențele sunt desenate pe cerc, în sens trigonometric (contrar acelor de ceasornic). Aceasta stabilește direcția de referință la rotirea unei secvențe față de cealaltă.

Secvența $y(n)$ se obține prin convoluția circulară dintre $h(k)$ și $x(k)$, ca în relația (3.39). Începând cu $m = 0$, obținem

$$y(0) = \sum_{k=0}^3 x(k)h((-k))_4.$$

Secvența $h((-k))_4$ este simetrica secvenței $h(k)$, desenată pe cerc (figura 3.8. b)). Altfel spus, secvența simetrică este simplu, secvența $h(k)$ desenată în sensul acelor de ceasornic (invers trigonometric).

Probleme rezolvate

Secvența produs se obține înmulțind $x(k)$ cu $h((-k))_4$, punct cu punct. Secvența produs este de asemenea reprezentată în figura 3.8. b). În final, adunând valorile secvenței produs, obținem

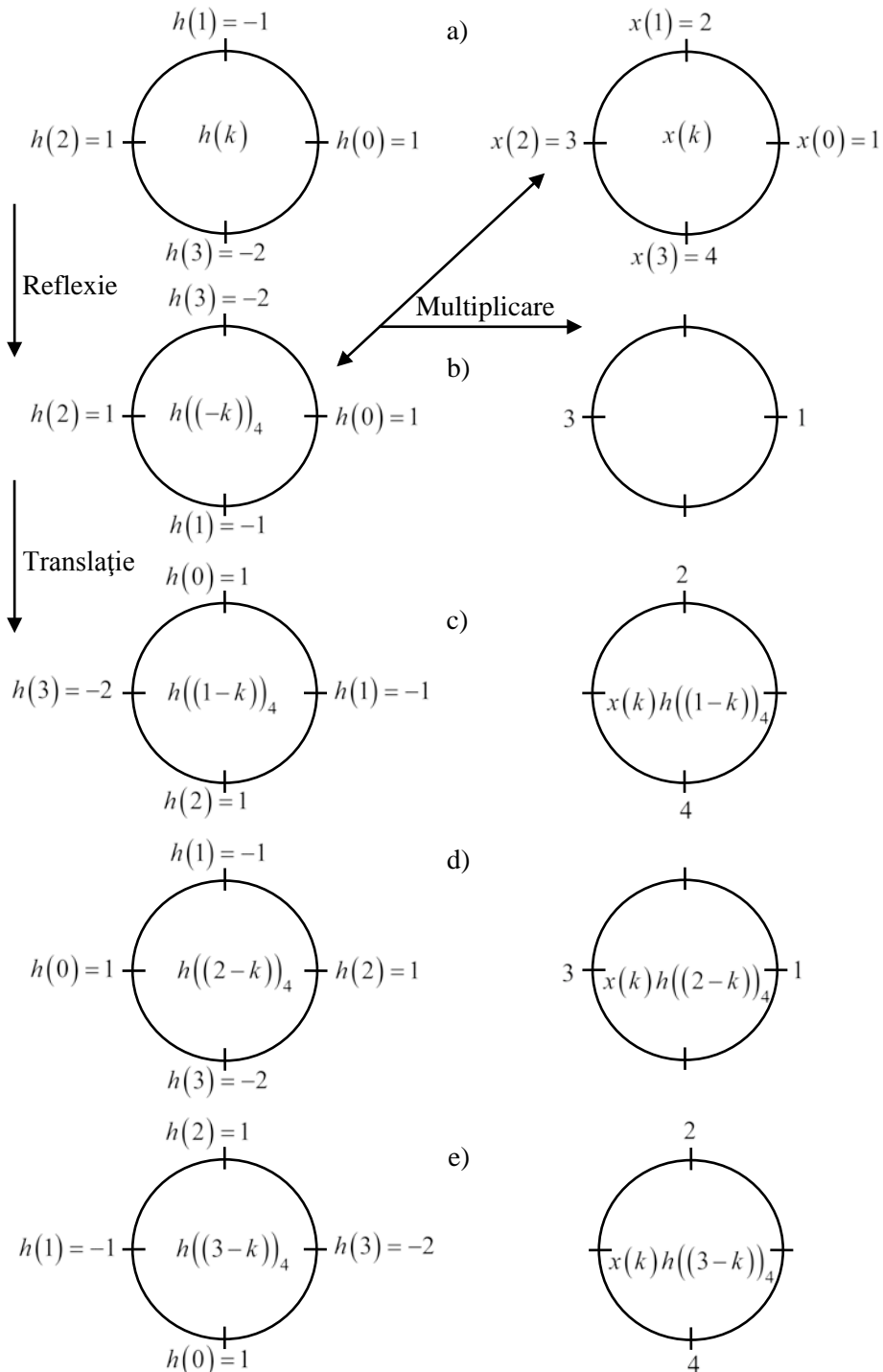
$$y(0) = 1 - 4 + 3 - 4 = -4.$$


Figura 3.8. Evaluarea convoluției circulare, folosind metoda grafică

Pentru $m = 1$ avem: $y(1) = \sum_{k=0}^3 x(k)h((1-k))_4$. Se verifică ușor faptul că $h((1-k))_4$ este secvența $h((-k))_4$ translatață (rotită) în sens trigonometric cu 1 eșantion, ca în figura 3.8. c). Această secvență se înmulțește cu $x(k)$ pentru obținerea secvenței produs (figura 3.8. c)). Adunând toate valorile secvenței produs, obținem

$$y(1) = -1 + 2 - 6 + 4 = -1.$$

Probleme rezolvate

Pentru $m = 2$ avem: $y(2) = \sum_{k=0}^3 x(k)h((2-k))_4$. Se verifică ușor faptul că $h((2-k))_4$ este secvența $h((-k))_4$ translatată (rotită) în sens trigonometric cu 2 eșantioane, ca în figura 3.8. d). Această secvență se înmulțește cu $x(k)$ pentru obținerea secvenței produs (figura 3.8. d)). Adunând toate valorile secvenței produs, obținem

$$y(2) = 1 - 2 + 3 - 8 = -6.$$

Pentru $m = 3$ avem: $y(3) = \sum_{k=0}^3 x(k)h((3-k))_4$. Se verifică ușor faptul că $h((3-k))_4$ este secvența $h((-k))_4$ translatată (rotită) în sens trigonometric cu 3 eșantioane, ca în figura 3.8. e). Această secvență se înmulțește cu $x(k)$ pentru obținerea secvenței produs (figura 3.8. e)). Adunând toate valorile secvenței produs, obținem

$$y(3) = -2 + 2 - 3 + 4 = 1.$$

Observăm că dacă continuăm evaluarea, pentru $m \geq 4$, obținem aceleași patru valori anterioare. În concluzie, convoluția circulară a secvențelor $x(k)$ și $h(k)$ determină secvența:

$$y(n) = \left\{ \begin{array}{l} -4, -1, -6, 1 \end{array} \right\}.$$

Metoda 2. Evaluarea convoluției circulare cu ajutorul transformatei Fourier discrete

Evaluăm prima dată DFT-urile corespunzătoare secvențelor $x(n)$ și $h(n)$. DFT în 4 puncte pentru $x(n)$ este:

$$\text{DFT}\{x(n)\} = X(k) = \sum_{n=0}^3 x(n)e^{-j\frac{2\pi k}{4}n}, \quad k = \overline{0,3}$$

$$\begin{aligned} X(k) &= 1 + 2e^{-j\frac{2\pi k}{4}1} + 3e^{-j\frac{2\pi k}{4}2} + 4e^{-j\frac{2\pi k}{4}3} = 1 + 2e^{-j\frac{\pi k}{2}} + 3e^{-j\pi k} + 4e^{-j\frac{3\pi k}{2}} \\ &= 1 + 2\left(\cos\frac{\pi k}{2} - j\sin\frac{\pi k}{2}\right) + 3(\cos\pi k - j\sin\pi k) + 4\left(\cos\frac{3\pi k}{2} - j\sin\frac{3\pi k}{2}\right) \\ &= 1 + 2\cos\frac{\pi k}{2} + 3\cos\pi k + 4\cos\frac{3\pi k}{2} - j\left(2\sin\frac{\pi k}{2} + 3\sin\pi k + 4\sin\frac{3\pi k}{2}\right) \end{aligned}$$

$$X(0) = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$$X(1) = 1 + 2\cos\frac{\pi}{2} + 3\cos\pi + 4\cos\frac{3\pi}{2} - j\left(2\sin\frac{\pi}{2} + 3\sin\pi + 4\sin\frac{3\pi}{2}\right) = 1 - 3 - j(2 - 4) = -2 + 2j$$

$$X(2) = 1 + 2\cos\pi + 3\cos 2\pi + 4\cos 3\pi - j(2\sin\pi + 3\sin 2\pi + 4\sin 3\pi) = 1 - 2 + 3 - 4 = -2$$

$$X(3) = 1 + 2\cos\frac{3\pi}{2} + 3\cos 3\pi + 4\cos\frac{9\pi}{2} - j\left(2\sin\frac{3\pi}{2} + 3\sin 3\pi + 4\sin\frac{9\pi}{2}\right) = 1 - 3 - j(-2 + 4) = -2 - 2j$$

$$\text{DFT-ul în 4 puncte pentru } h(n) \text{ este: } \text{DFT}\{h(n)\} = H(k) = \sum_{n=0}^3 h(n)e^{-j\frac{2\pi k}{4}n}, \quad k = \overline{0,3}$$

$$H(k) = 1 - e^{-j\frac{\pi k}{2}} + e^{-j\pi k} - 2e^{-j\frac{3\pi k}{2}} = 1 - \left(\cos\frac{\pi k}{2} - j\sin\frac{\pi k}{2}\right) + (\cos\pi k - j\sin\pi k) - 2\left(\cos\frac{3\pi k}{2} - j\sin\frac{3\pi k}{2}\right)$$

$$= 1 - \left(\cos\frac{\pi k}{2} - j\sin\frac{\pi k}{2}\right) + (\cos\pi k - j\sin\pi k) - 2\left(\cos\frac{\pi k}{2} + j\sin\frac{\pi k}{2}\right)$$

$$= 1 - 3\cos\frac{\pi k}{2} + \cos\pi k - j\left(\sin\frac{\pi k}{2} + \sin\pi k\right)$$

$$H(0) = 1 - 3 + 1 = -1$$

$$H(1) = 1 - 3\cos\frac{\pi}{2} + \cos\pi - j\left(\sin\frac{\pi}{2} + \sin\pi\right) = 1 - 1 - j = -j$$

Probleme rezolvate

$$H(2) = 1 - 3\cos\pi + \cos 2\pi - j(\sin\pi + \sin 2\pi) = 1 + 3 + 1 = 5$$

$$H(3) = 1 - 3\cos\frac{3\pi}{2} + \cos 3\pi - j\left(\sin\frac{3\pi}{2} + \sin 3\pi\right) = 1 - 1 + j = j$$

Înmulțind cele două DFT-uri obținem produsul $Y(k) = X(k)H(k)$ sau echivalent

$$Y(0) = X(0)H(0) = 10 \cdot (-1) = -10$$

$$Y(1) = X(1)H(1) = (-2 + 2j) \cdot (-j) = 2 + 2j$$

$$Y(2) = X(2)H(2) = (-2) \cdot 5 = -10$$

$$Y(3) = X(3)H(3) = (-2 - 2j) \cdot j = 2 - 2j$$

Pentru a obține secvența de ieșire $y(n)$, trebuie evaluat IDFT-ul secvenței $Y(k)$:

$$\text{IDFT}\{Y(k)\} = y(n) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 Y(k) e^{j\frac{2\pi k n}{4}}, \quad n = \overline{0, 3}$$

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{1}{4} \left[-10 + (2 + 2j) e^{j\frac{\pi n}{2}} - 10 e^{j\pi n} + (2 - 2j) e^{j\frac{3\pi n}{2}} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[-10 + (2 + 2j) \left(\cos\frac{\pi n}{2} + j \sin\frac{\pi n}{2} \right) - 10(\cos\pi n + j \sin\pi n) \right. \\ &\quad \left. + (2 - 2j) \left(\cos\frac{3\pi n}{2} + j \sin\frac{3\pi n}{2} \right) \right] \\ &= -\frac{5}{2} + \cos\frac{\pi n}{2} - \frac{5}{2} \cos\pi n - \sin\frac{\pi n}{2} - \frac{5}{2} j \sin\pi n \end{aligned}$$

$$y(0) = -\frac{5}{2} + 1 - \frac{5}{2} = -4$$

$$y(1) = -\frac{5}{2} + \cos\frac{\pi}{2} - \frac{5}{2} \cos\pi - \sin\frac{\pi}{2} - \frac{5}{2} j \sin\pi = -\frac{5}{2} + \frac{5}{2} - 1 = -1$$

$$y(2) = -\frac{5}{2} + \cos\pi - \frac{5}{2} \cos 2\pi - \sin\pi - \frac{5}{2} j \sin 2\pi = -\frac{5}{2} - 1 - \frac{5}{2} = -6$$

$$y(3) = -\frac{5}{2} + \cos\frac{3\pi}{2} - \frac{5}{2} \cos 3\pi - \sin\frac{3\pi}{2} - \frac{5}{2} j \sin 3\pi = -\frac{5}{2} + \frac{5}{2} + 1 = 1$$

$$\Rightarrow y(n) = \left\{ \underset{\uparrow}{-4}, -1, -6, 1 \right\}.$$

Problema 14 – Evaluarea coeficienților DFT: Se consideră un semnal analogic

$$x_a(t) = \cos(200\pi t) - 3.5 \cos(600\pi t),$$

care este eșantionat cu $F_s = 1$ kHz. Se dorește evaluarea coeficienților DFT.

În urma eșantionării, obținem secvența:

$$x(n) = \cos\left(2\pi \frac{100}{1000} n\right) - 3.5 \cos\left(2\pi \frac{300}{1000} n\right) = \cos\left(2\pi \frac{1}{10} n\right) - 3.5 \cos\left(2\pi \frac{3}{10} n\right)$$

Perioada acestei secvențe este $N = 10$, deci vom evalua DFT-ul în 10 puncte.

Secvența $x(n)$ o putem scrie ca sumă de exponențiale, de forma:

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{e^{j2\pi\frac{1}{10}n} + e^{-j2\pi\frac{1}{10}n}}{2} - 3.5 \frac{e^{j2\pi\frac{3}{10}n} + e^{-j2\pi\frac{3}{10}n}}{2} = \frac{1}{10} \left(5e^{j2\pi\frac{1}{10}n} + 5e^{-j2\pi\frac{1}{10}n} - 17.5e^{j2\pi\frac{3}{10}n} - 17.5e^{-j2\pi\frac{3}{10}n} \right) \\ &= \frac{1}{10} \left(5e^{j2\pi\frac{1}{10}n} + 5e^{j2\pi\frac{9}{10}n} - 17.5e^{j2\pi\frac{3}{10}n} - 17.5e^{j2\pi\frac{7}{10}n} \right) \end{aligned}$$

iar relația dintre secvența $x(n)$ și coeficienții DFT, $X(k)$, este:

Probleme rezolvate

$$x(n) = \frac{1}{10} \sum_{k=0}^9 X(k) e^{j2\pi \frac{k}{10} n}, \quad n = \overline{0,9}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X(0) = X(2) = X(4) = X(5) = X(6) = X(8) = 0 \\ X(1) = X(9) = 5 \\ X(3) = X(7) = -17.5 \end{cases}$$

Problema 15 – Ieșirea unui filtru cu răspuns finit la impuls: Folosind DFT și IDFT se dorește determinarea ieșirii filtrului cu răspuns finit la impuls, caracterizat de răspunsul la impuls:

$$h(n) = \left\{ \underset{\uparrow}{1}, 2, 3 \right\} \text{ la intrarea } x(n) = \left\{ \underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 2 \right\}.$$

Lungimea secvenței răspuns la impuls este $M = 3$, iar lungimea secvenței de intrare este $L = 4$. Dacă am realiza convoluția liniară am obține secvența de ieșire de lungime $N = L + M - 1 = 6$, ceea ce înseamnă că DFT-urile trebuie evaluate în cel puțin 6 puncte. În practică, metodele numerice folosite în evaluarea DFT-ului impun ca N să fie o putere întregă a lui 2 (cerință impusă de algoritmi FFT de calcul ai DFT-ului). Cea mai mică putere întregă a lui 2, mai mare sau egală cu 6 este $N = 8$.

Vom evalua DFT-ul corespunzător secvenței de intrare, în 8 puncte:

$$X(k) = \sum_{n=0}^7 x(n) W_8^{kn}, \quad k = \overline{0,7}$$

$$\begin{aligned} X(k) &= x(0)W_8^{k0} + x(1)W_8^{k1} + x(2)W_8^{k2} + x(3)W_8^{k3} + x(4)W_8^{k4} + x(5)W_8^{k5} + x(6)W_8^{k6} + x(7)W_8^{k7} \\ &= W_8^0 + 2W_8^k + 3W_8^{2k} + 2W_8^{3k} \end{aligned}$$

unde ponderile W_N^k au fost evaluate la **Problema 12**.

$$X(k) = 1 + 2e^{-j\frac{\pi}{4}k} + 3e^{-j\frac{\pi}{2}k} + 2e^{-j\frac{3\pi}{4}k}$$

Evaluând pentru $k = \overline{0,7}$ obținem succesiv

$$X(0) = 1 + 2 + 3 + 2 = 8$$

$$X(1) = 1 + 2e^{-j\frac{\pi}{4}} + 3e^{-j\frac{\pi}{2}} + 2e^{-j\frac{3\pi}{4}} = 1 + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 3(0 - j1) + 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - j(2\sqrt{2} + 3)$$

$$X(2) = 1 + 2e^{-j\frac{\pi}{2}} + 3e^{-j\pi} + 2e^{-j\frac{3\pi}{2}} = 1 + 2(0 - j1) + 3(-1 - j0) + 2(0 + j1) = -2$$

$$X(3) = 1 + 2e^{-j\frac{3\pi}{4}} + 3e^{-j\frac{3\pi}{2}} + 2e^{-j\frac{9\pi}{4}} = 1 + 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 3(0 + j1) + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - j(2\sqrt{2} - 3)$$

$$X(4) = 1 + 2e^{-j\pi} + 3e^{-j2\pi} + 2e^{-j3\pi} = 1 + 2(-1 - j0) + 3(1 - j0) + 2(-1 - j0) = 0$$

$$X(5) = 1 + 2e^{-j\frac{5\pi}{4}} + 3e^{-j\frac{5\pi}{2}} + 2e^{-j\frac{15\pi}{4}} = 1 + 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 3(0 - j1) + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + j(2\sqrt{2} - 3)$$

$$X(6) = 1 + 2e^{-j\frac{3\pi}{2}} + 3e^{-j3\pi} + 2e^{-j\frac{9\pi}{2}} = 1 + 2(0 + j1) + 3(-1 - j0) + 2(0 - j1) = -2$$

$$X(7) = 1 + 2e^{-j\frac{7\pi}{4}} + 3e^{-j\frac{7\pi}{2}} + 2e^{-j\frac{21\pi}{4}} = 1 + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 3(0 + j1) + 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + j(2\sqrt{2} + 3)$$

Vom evalua DFT-ul corespunzător secvenței răspuns la impuls, $h(n)$, în $N = 8$ puncte:

$$H(k) = \sum_{n=0}^7 h(n) W_8^{kn}, \quad k = \overline{0,7}$$

$$= W_8^0 + 2W_8^k + 3W_8^{2k} = 1 + 2e^{-j\frac{\pi}{4}k} + 3e^{-j\frac{\pi}{2}k}$$

Evaluând pentru $k = \overline{0,7}$ obținem succesiv

$$H(0) = 6$$

Probleme rezolvate

$$H(1) = 1 + 2e^{-j\frac{\pi}{4}} + 3e^{-j\frac{\pi}{2}} = 1 + \sqrt{2} - j(3 + \sqrt{2})$$

$$H(2) = 1 + 2e^{-j\frac{\pi}{2}} + 3e^{-j\pi} = -2 - j2$$

$$H(3) = 1 + 2e^{-j\frac{3\pi}{4}} + 3e^{-j\frac{3\pi}{2}} = 1 - \sqrt{2} + j(3 - \sqrt{2})$$

$$H(4) = 1 + 2e^{-j\pi} + 3e^{-j2\pi} = 2$$

$$H(5) = 1 + 2e^{-j\frac{5\pi}{4}} + 3e^{-j\frac{5\pi}{2}} = 1 - \sqrt{2} - j(3 - \sqrt{2})$$

$$H(6) = 1 + 2e^{-j\frac{3\pi}{2}} + 3e^{-j3\pi} = -2 + j2$$

$$H(7) = 1 + 2e^{-j\frac{7\pi}{4}} + 3e^{-j\frac{7\pi}{2}} = 1 + \sqrt{2} + j(3 + \sqrt{2})$$

Efectuând produsul $Y(k) = H(k)X(k)$, $k = \overline{0,7}$, obținem

$$Y(0) = 6 \cdot 8 = 48$$

$$Y(1) = [1 + \sqrt{2} - j(3 + \sqrt{2})][1 - j(2\sqrt{2} + 3)] = -23.31 - j18.49$$

$$Y(2) = (-2 - j2)(-2) = 4 + j4$$

$$Y(3) = [1 - \sqrt{2} + j(3 - \sqrt{2})][1 - j(2\sqrt{2} - 3)] = -0.69 + j1.51$$

$$Y(4) = 0$$

$$Y(5) = [1 - \sqrt{2} - j(3 - \sqrt{2})][1 + j(2\sqrt{2} - 3)] = -0.69 - j1.51$$

$$Y(6) = (-2 + j2)(-2) = 4 - j4$$

$$Y(7) = [1 + \sqrt{2} + j(3 + \sqrt{2})][1 + j(2\sqrt{2} + 3)] = -23.31 + j18.49$$

Pentru a obține secvența de ieșire, $y(n)$, se aplică IDFT-ul, secvenței $Y(k)$:

$$y(n) = \text{IDFT}\{Y(k)\} = \frac{1}{8} \sum_{n=0}^7 Y(k) e^{j\frac{2\pi}{8}kn}, \quad n = \overline{0,7}$$

$$y(n) = \frac{1}{8} \left[Y(0) + Y(1)e^{j\frac{\pi}{4}n} + Y(2)e^{j\frac{\pi}{2}n} + Y(3)e^{j\frac{3\pi}{4}n} + Y(4)e^{j\pi} + Y(5)e^{j\frac{5\pi}{4}n} + Y(6)e^{j\frac{3\pi}{2}n} + Y(7)e^{j\frac{7\pi}{4}n} \right]$$

$$= 6 - (2.91 + j2.31) \left(\cos \frac{\pi n}{4} + j \sin \frac{\pi n}{4} \right) + \left(\frac{1}{2} + j\frac{1}{2} \right) \left(\cos \frac{\pi n}{2} + j \sin \frac{\pi n}{2} \right)$$

$$- (0.09 - j0.19) \left(\cos \frac{3\pi n}{4} + j \sin \frac{3\pi n}{4} \right) + 0 - (0.09 + j0.19) \left(\cos \frac{5\pi n}{4} + j \sin \frac{5\pi n}{4} \right)$$

$$+ \left(\frac{1}{2} - j\frac{1}{2} \right) \left(\cos \frac{3\pi n}{2} + j \sin \frac{3\pi n}{2} \right) - (2.91 - j2.31) \left(\cos \frac{7\pi n}{4} + j \sin \frac{7\pi n}{4} \right)$$

$$\stackrel{\substack{\cos x = \cos(x \pm 2\pi) \\ \sin x = \sin(x \pm 2\pi)}}{=} 6 - 2.91 \cdot 2 \cos \frac{\pi n}{4} + 0.5 \cdot 2 \left(\cos \frac{\pi n}{2} - \sin \frac{\pi n}{2} \right) - 0.09 \cdot 2 \cos \frac{3\pi n}{4} + 2.31 \cdot 2 \sin \frac{\pi n}{4}$$

$$- 0.19 \cdot 2 \sin \frac{3\pi n}{4}$$

$$= 6 - 5.82 \cos \frac{\pi n}{4} + \cos \frac{\pi n}{2} - \sin \frac{\pi n}{2} - 0.18 \cos \frac{3\pi n}{4} + 4.62 \sin \frac{\pi n}{4} - 0.38 \sin \frac{3\pi n}{4}$$

Evaluând pentru $n = \overline{0,7}$ obținem succesiv

$$y(0) = 6 - 2.91 + \frac{1}{2} - 0.09 - 0.09 + \frac{1}{2} - 2.91 + j \left(-2.31 + \frac{1}{2} + 0.19 - 0.19 - \frac{1}{2} + 2.31 \right) = 1$$

Probleme rezolvate

$$y(1) = 6 - 5.82 \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} - 0.18 \cos \frac{3\pi}{4} + 4.62 \sin \frac{\pi}{4} - 0.38 \sin \frac{3\pi}{4}$$

$$= 6 - 5.82 \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + 0.18 \frac{\sqrt{2}}{2} + 4.62 \frac{\sqrt{2}}{2} - 0.38 \frac{\sqrt{2}}{2} = 5 - 0.7\sqrt{2} \approx 4$$

$$y(2) = 6 - 5.82 \cos \frac{\pi}{2} + \cos \pi - \sin \pi - 0.18 \cos \frac{3\pi}{2} + 4.62 \sin \frac{\pi}{2} - 0.38 \sin \frac{3\pi}{2} = 6 - 1 + 4.62 + 0.38 = 10$$

$$y(3) = 6 - 5.82 \cos \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{2} - \sin \frac{3\pi}{2} - 0.18 \cos \frac{9\pi}{4} + 4.62 \sin \frac{3\pi}{4} - 0.38 \sin \frac{9\pi}{4}$$

$$= 6 + 5.82 \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - 0.18 \frac{\sqrt{2}}{2} + 4.62 \frac{\sqrt{2}}{2} - 0.38 \frac{\sqrt{2}}{2} = 7 + 4.94\sqrt{2} \approx 14$$

$$y(4) = 6 - 5.82 \cos \pi + \cos 2\pi - \sin 2\pi - 0.18 \cos 3\pi + 4.62 \sin \pi - 0.38 \sin 3\pi = 6 + 5.82 + 1 + 0.18 = 13$$

$$y(5) = 6 - 5.82 \cos \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{2} - \sin \frac{5\pi}{2} - 0.18 \cos \frac{15\pi}{4} + 4.62 \sin \frac{5\pi}{4} - 0.38 \sin \frac{15\pi}{4}$$

$$= 6 + 5.82 \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 - 0.18 \frac{\sqrt{2}}{2} - 4.62 \frac{\sqrt{2}}{2} + 0.38 \frac{\sqrt{2}}{2} = 5 + 0.7\sqrt{2} \approx 6$$

$$y(6) = 6 - 5.82 \cos \frac{3\pi}{2} + \cos 3\pi - \sin 3\pi - 0.18 \cos \frac{9\pi}{2} + 4.62 \sin \frac{3\pi}{2} - 0.38 \sin \frac{9\pi}{2}$$

$$= 6 - 1 - 4.62 - 0.38 = 0$$

$$y(7) = 6 - 5.82 \cos \frac{7\pi}{4} + \cos \frac{7\pi}{2} - \sin \frac{7\pi}{2} - 0.18 \cos \frac{21\pi}{4} + 4.62 \sin \frac{7\pi}{4} - 0.38 \sin \frac{21\pi}{4}$$

$$= 6 - 5.82 \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - 0.18 \frac{\sqrt{2}}{2} - 4.62 \frac{\sqrt{2}}{2} + 0.38 \frac{\sqrt{2}}{2} = 7 - 5.12\sqrt{2} \approx 0$$

În concluzie, ieșirea filtrului cu răspuns finit la impuls este:

$$y(n) = \{1, 4, 10, 14, 13, 6, 0, 0\}.$$

Deși multiplicarea a două DFT-uri corespunde convoluției circulare în domeniul timp, se observă că prin completarea secvențelor $x(n)$ și $h(n)$ cu un număr suficient de zerouri, convoluția circulară conduce la același rezultat ca și convoluția liniară.

Dacă în exemplul anterior se efectuează convoluția circulară dintre

$$h(n) = \{1, 2, 3, 0, 0, 0\} \text{ și } x(n) = \{1, 2, 3, 2, 0, 0\},$$

se obține

$$y(n) = \sum_{k=0}^5 h(k) x((n-k))_6$$

Evaluând pentru $n = \overline{0,5}$ obținem succesiv

$$y(0) = \sum_{k=0}^5 x(k) h((-k))_6 = 1 \cdot 1 = 1$$

$$y(1) = \sum_{k=0}^5 x(k) h((1-k))_6 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 4$$

$$y(2) = \sum_{k=0}^5 x(k) h((2-k))_6 = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 10$$

$$y(3) = \sum_{k=0}^5 x(k) h((3-k))_6 = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 14$$

$$y(4) = \sum_{k=0}^5 x(k) h((4-k))_6 = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 13$$

$$y(5) = \sum_{k=0}^5 x(k) h((5-k))_6 = 2 \cdot 3 = 6$$

Probleme rezolvate

$$\Rightarrow y(n) = \left\{ \underset{\uparrow}{1}, 4, 10, 14, 13, 6 \right\}.$$

Dacă $N \geq M + L - 1$, nu apare suprapunere (eroare alias) în domeniul timp, în caz contrar, secvența rezultată va conține suprapuneri ale unor componente.

Problema 16 – Ieșirea unui filtru FIR, interferență componente: Acest exemplu își propune evaluarea DFT-ului într-un mod oarecum deficitar, pentru a se observa apariția interferenței componentelor. Se va repeta **Problema 15**, pentru $N = 4$.

Vom evalua DFT-ul corespunzător secvenței răspuns la impuls în $N = 4$ puncte:

$$H(k) = \sum_{n=0}^3 h(n)W_4^{kn}W_4^0 + 2W_4^k + 3W_4^{2k} = 1 + 2e^{-j\frac{\pi}{2}k} + 3e^{-j\pi k}, \quad k = \overline{0, 3}$$

Evaluând pentru $k = \overline{0, 3}$ obținem succesiv

$$H(0) = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$H(1) = 1 + 2e^{-j\frac{\pi}{2}} + 3e^{-j\pi} = 1 - j2 - 3 = -2 - j2$$

$$H(2) = 1 + 2e^{-j\pi} + 3e^{-j2\pi} = 1 - 2 + 3 = 2$$

$$H(3) = 1 + 2e^{-j\frac{3\pi}{2}} + 3e^{-j3\pi} = 1 + j2 - 3 = -2 + j2$$

Vom evalua DFT-ul corespunzător secvenței de intrare, $x(n)$, în $N = 4$ puncte.

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^3 x(n)W_4^{kn}, \quad k = \overline{0, 3} \\ &= W_4^0 + 2W_4^k + 3W_4^{2k} + 2W_4^{3k} = 1 + 2e^{-j\frac{\pi}{2}k} + 3e^{-j\pi k} + 2e^{-j\frac{3\pi}{2}k} \end{aligned}$$

Evaluând pentru $k = \overline{0, 3}$ obținem succesiv

$$X(0) = 1 + 2 + 3 + 2 = 8$$

$$X(1) = 1 + 2e^{-j\frac{\pi}{2}} + 3e^{-j\pi k} + 2e^{-j\frac{3\pi}{2}} = 1 - j2 - 3 + j2 = -2$$

$$X(2) = 1 + 2e^{-j\pi} + 3e^{-j2\pi} + 2e^{-j3\pi} = 1 - 2 + 3 - 2 = 0$$

$$X(3) = 1 + 2e^{-j\frac{3\pi}{2}} + 3e^{-j3\pi} + 2e^{-j\frac{9\pi}{2}k} = 1 + j2 - 3 - j2 = -2$$

Efectuând produsul $\hat{Y}(k) = H(k)X(k)$, $k = \overline{0, 3}$, obținem

$$\hat{Y}(0) = 6 \cdot 8 = 48$$

$$\hat{Y}(1) = (-2 - j2)(-2) = 4 + j4$$

$$\hat{Y}(2) = 2 \cdot 0 = 0$$

$$\hat{Y}(3) = (-2 + j2)(-2) = 4 - j4$$

Pentru a obține secvența de ieșire $\hat{y}(n)$ se aplică IDFT-ul secvenței $\hat{Y}(k)$ și se ține cont de faptul că $\cos x = \cos(x \pm 2\pi)$, $\sin x = \sin(x \pm 2\pi)$

$$\begin{aligned} \hat{y}(n) &= \text{IDFT}\{\hat{Y}(k)\} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 \hat{Y}(k)e^{j\frac{2\pi}{4}kn}, \quad n = \overline{0, 3} \\ &= \frac{1}{4} \left[\hat{Y}(0) + \hat{Y}(1)e^{j\frac{\pi}{2}n} + \hat{Y}(2)e^{j\pi n} + \hat{Y}(3)e^{j\frac{3\pi}{2}n} \right] = \frac{1}{4} \left[48 + (4 + j4)e^{j\frac{\pi}{2}n} + 0e^{j\pi n} + (4 - j4)e^{j\frac{3\pi}{2}n} \right] \\ &= 12 + (1 + j) \left(\cos \frac{\pi n}{2} + j \sin \frac{\pi n}{2} \right) + (1 - j) \left(\cos \frac{3\pi n}{2} + j \sin \frac{3\pi n}{2} \right) \\ &= 12 + (1 + j) \left(\cos \frac{\pi n}{2} + j \sin \frac{\pi n}{2} \right) + (1 - j) \left(\cos \frac{\pi n}{2} - j \sin \frac{\pi n}{2} \right) = 12 + 2 \cos \frac{\pi n}{2} - 2 \sin \frac{\pi n}{2} \end{aligned}$$

Probleme rezolvate

Evaluând pentru $n = \overline{0,7}$ obținem succesiv

$$\hat{y}(0) = 12 + 2 = 14$$

$$\hat{y}(1) = 12 + 2 \cos \frac{\pi}{2} - 2 \sin \frac{\pi}{2} = 12 - 2 = 10$$

$$\hat{y}(2) = 12 + 2 \cos \pi - 2 \sin \pi = 12 - 2 = 10$$

$$\hat{y}(3) = 12 + 2 \cos \frac{3\pi}{2} - 2 \sin \frac{3\pi}{2} = 12 + 2 = 14$$

$$\Rightarrow \hat{y}(n) = \{14, 10, 10, 14\}.$$

Dacă se efectuează convoluția circulară dintre

$$h(n) = \{1, 2, 3, 0\} \text{ și } x(n) = \{1, 2, 3, 2\},$$

se obține

$$\hat{y}(n) = \sum_{k=0}^3 h(k) x((n-k))_4$$

Evaluând pentru $n = \overline{0,3}$ obținem succesiv

$$\hat{y}(0) = \sum_{k=0}^3 x(k) h((-k))_6 = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 14$$

$$\hat{y}(1) = \sum_{k=0}^3 x(k) h((1-k))_6 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 10$$

$$\hat{y}(2) = \sum_{k=0}^5 x(k) h((2-k))_6 = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 10$$

$$\hat{y}(3) = \sum_{k=0}^5 x(k) h((3-k))_6 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 14$$

$$\Rightarrow \hat{y}(n) = \{14, 10, 10, 14\}$$

Dacă se compară rezultatul $\hat{y}(n)$ obținut prin folosirea DFT-ului și IDFT-ului în 4 puncte cu $y(n)$ obținut prin DFT și IDFT în 8 puncte, se observă diferențe datorită suprapunerilor sau interferenței componentelor.

$$\hat{y}(0) = y(0) + y(4) = 1 + 13 = 14$$

$$\hat{y}(1) = y(1) + y(5) = 4 + 6 = 10$$

$$\hat{y}(2) = y(2) + y(6) = 10 + 0 = 10$$

$$\hat{y}(3) = y(3) + y(7) = 14 + 0 = 14$$

Se observă că numai primele două componente sunt afectate de eroarea alias, adică $\min\{L, M\} - 1$ componente.

Problema 17 – Evaluarea spectru: Se dorește evidențierea procedurii de evaluare a spectrului unui semnal analogic și a spectrului secvenței discrete obținute prin eșantionarea uniformă a semnalului analogic.

Considerăm semnalul analogic: $x_a(t) = e^{-a|t|}$, $a > 0$.

Spectrul semnalului analogic este:

$$\begin{aligned} X_a(F) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j2\pi Ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-j2\pi Ft} dt = \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j2\pi Ft} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j2\pi Ft} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-at} e^{j2\pi Ft} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j2\pi Ft} dt = \frac{1}{a - j2\pi F} + \frac{1}{a + j2\pi F} = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 F^2} \end{aligned}$$

Probleme rezolvate

Presupunând că semnalul analogic este eșantionat cu frecvența $F_s = 1/T$, obținem secvența discretă:

$$x(n) = x_a(nT) = e^{-aT|n|} = (e^{-aT})^{|n|}.$$

Spectrul semnalului discret obținut prin eșantionare este:

$$\begin{aligned} X\left(\frac{F}{F_s}\right) &= X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j2\pi fn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (e^{-aT})^{|n|} e^{-j2\pi fn} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} (e^{-aT})^{-n} e^{-j2\pi fn} + \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-aT})^n e^{-j2\pi fn} = \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-aT})^n e^{j2\pi fn} + \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-aT})^n e^{-j2\pi fn} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-aT})^n e^{j2\pi fn} - 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-aT})^n e^{-j2\pi fn} \\ &= \frac{1}{1 - e^{-aT} e^{j2\pi f}} - 1 + \frac{1}{1 - e^{-aT} e^{-j2\pi f}} = \frac{1 - e^{-2aT}}{1 - 2e^{-aT} \cos(2\pi f) + e^{-2aT}} \end{aligned}$$

Spectrul secvenței $x(n)$ este periodic cu perioada F_s , datorită termenului $\cos[(2\pi F)/F_s]$.

Spectrul $X_a(F)$ fiind de bandă limitată, eroarea de alias nu mai poate fi evitată. Conform relației (3.50)

$$X(f) = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F - kF_s),$$

spectrul semnalului reconstituit $\tilde{x}_a(t)$ este:

$$\tilde{X}_a(F) = \begin{cases} \frac{1}{F_s} \frac{1 - e^{-2aT}}{1 - 2e^{-aT} \cos \frac{2\pi F}{F_s} + e^{-2aT}} = \frac{T(1 - e^{-2aT})}{1 - 2e^{-aT} \cos(2\pi FT) + e^{-2aT}}, & |F| \leq \frac{F_s}{2} = \frac{1}{2T} \\ 0, & |F| > \frac{F_s}{2} = \frac{1}{2T} \end{cases}$$

Comparând spectrul semnalului neeșantionat cu cel al semnalului reconstituit, se observă că acestea pot diferi semnificativ pentru o frecvență de eșantionare aleasă necorespunzător.

Dacă în relația corespunzătoare spectrului semnalului reconstituit considerăm T suficient de mic, astfel încât $|2aT| \ll 1$, numărătorul și numitorul pot fi descompuse în puteri ale lui T , până la ordinul doi. Pentru $|F| \leq 1/2T$ și $|x| \ll 1$ folosind aproximațiile:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \quad \text{și} \quad \cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$$

obținem

$$\begin{aligned} X_a(F) &= \frac{T(1 - e^{-2aT})}{1 - 2e^{-aT} \cos(2\pi FT) + e^{-2aT}} \approx \frac{T[1 - (1 - 2aT + 2a^2T^2)]}{1 - 2\left(1 - aT + \frac{1}{2}a^2T^2\right)(1 - 2\pi^2F^2T^2) + (1 - 2aT + 2a^2T^2)} \\ &= \frac{2aT^2 - 2a^2T^3}{a^2T^2 + 4\pi^2F^2T^2 - 4a\pi^2F^2T^3 + 2\pi^2a^2F^2T^4} \end{aligned}$$

Dacă neglijăm termenii care conțin puteri ale lui T mai mari ca doi, avem:

$$X_a(F) \approx \frac{2aT^2}{a^2T^2 + 4\pi^2F^2T^2} = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2F^2}$$

Pentru acest caz particular, spectrul semnalului reconstituit se apropie de spectrul semnalului analogic de bandă nelimitată, dacă frecvența de eșantionare crește suficient de mult.

Capitolul 1 – Filtrări selective

Problema 1 – Proiectarea unui FTJ ideal aproximat prin trunchiere: Se dorește proiectarea unui FTS cu răspuns infinit la impuls, de ordinul întâi, cu frecvența de tăiere (la 3 dB) egală cu 0.7π (pulsăția).

Funcția de transfer pentru FTS de ordinul întâi este dată de (1.12):

$$H_{TS}(z) = \frac{1-a}{2} \frac{1-z^{-1}}{1+az^{-1}}, \quad a = \frac{1-\sin \omega_c}{\cos \omega_c}.$$

Pentru a evalua funcția de transfer, trebuie evaluat în prealabil parametrul a :

$$\sin 0.7\pi = 0.809, \quad \cos 0.7\pi = -0.588$$

$$\Rightarrow a = \frac{1-0.809}{-0.5878} = -0.325$$

În consecință, funcția de transfer corespunzătoare FTS de ordinul întâi este:

$$H_{TS}(z) = \frac{1+0.325}{2} \frac{1-z^{-1}}{1-0.325z^{-1}} = 0.6625 \frac{1-z^{-1}}{1-0.325z^{-1}}$$

Problema 2 – Proiectarea unui FTB: Acest exemplu urmărește proiectarea unui FTB, cu răspuns infinit la impuls, de ordinul al doilea, cu lățimea de bandă egală cu 0.2π și frecvența centrală 0.6π .

Funcția de transfer pentru FTB de ordinul doi este dată de relația:

$$H_{TB}(z) = \frac{1-a}{2} \frac{1-z^{-2}}{1-b(1+a)z^{-1}+az^{-2}},$$

unde constantele a și b se evaluează în funcție de frecvența centrală și de lățimea de bandă a filtrului:

$$\omega_0 = \arccos b, \quad B = \arccos \left(\frac{2a}{1+a^2} \right).$$

Pentru filtrul considerat frecvența centrală este 0.6π , ca atare $b = \cos 0.6\pi = -0.309$, iar banda este 0.2π , adică:

$$\frac{2a}{1+a^2} = \cos 0.2\pi = 0.809.$$

Pe a îl aflăm rezolvând ecuația de ordinul doi

$$0.809a^2 - 2a + 0.809 = 0 \Leftrightarrow a_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 2.617924}}{1.618} = \frac{2 \pm 1.1756}{1.618} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0.51 \\ a_2 = 1.963 \end{cases}$$

Funcțiile de transfer corespunzătoare FTB de ordinul al doilea sunt:

$$H_{1TB}(z) = \frac{1-0.51}{2} \frac{1-z^{-2}}{1+0.309(1+0.51)z^{-1}+0.51z^{-2}} = 0.245 \frac{1-z^{-2}}{1+0.4666z^{-1}+0.51z^{-2}},$$

$$H_{2TB}(z) = \frac{1-1.963}{2} \frac{1-z^{-2}}{1+0.309(1+1.963)z^{-1}+1.963z^{-2}} = -0.4815 \frac{1-z^{-2}}{1+0.9156z^{-1}+1.963z^{-2}}$$

Pentru ambele funcții de transfer avem zerourile: $z_{1,2} = \pm 1$.

Polii funcției $H_{1TB}(z)$ sunt $p_{1,2} = \frac{-0.4666 \pm \sqrt{0.2177 - 2.04}}{2} = -0.2333 \pm j0.675$, iar modulul lor

este 0.714, ceea ce ne indică faptul că sunt în interiorul cercului unitate. Ca atare, acest sistem este BIBO stabil.

Polii funcției $H_{2TB}(z)$ sunt $p_{3,4} = \frac{-0.9156 \pm \sqrt{0.8383 - 7.852}}{2} = -0.4578 \pm j1.324$, iar modulul lor

este 1.4, ceea ce ne indică faptul că sunt în afara cercului unitate. Ca atare, această funcție nu este stabilă.

Probleme rezolvate

Problema 3 – Evaluarea funcției de sistem: Se urmărește evaluarea funcției de sistem pentru un filtru cu răspuns finit la impuls, de fază liniară, cu coeficienți reali, căruia i se cunoaște ordinul și localizarea câtorva dintre zerouri.

Considerăm un filtru cu răspuns finit la impuls de fază liniară, cu coeficienți reali, cu $M = 8$, cu zerourile localizate astfel: $z_1 = -0.5$, $z_2 = 0.3 + j0.5$, $z_3 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Pentru determinarea funcției de sistem, inițial trebuie localizate celelalte cinci zerouri. Deoarece ordinul filtrului cu răspuns finit la impuls este $M = 8$, trebuie să avem 8 zerouri. Zeroul real $z_1 = -0.5$ determină existența încă a unui zero real, reciprocul său: $z_4 = \frac{1}{z_1} = \frac{1}{-0.5} = -2$.

Zeroul complex $z_2 = 0.3 + j0.5$, aflându-se în interiorul cercului unitate ($|z_2| = 0.583$), determină existența zeroului complex-conjugat: $z_5 = z_2^* = 0.3 - j0.5$ precum și a zerourilor reciproce:

$$z_6 = \frac{1}{z_5} = \frac{1}{0.3 - j0.5} = \frac{0.3 + j0.5}{(0.3 - j0.5)(0.3 + j0.5)} = \frac{0.3 + j0.5}{0.3^2 + 0.5^2} = \frac{0.3}{0.34} + j\frac{0.5}{0.34} = 0.88 + j1.47$$

$$z_7 = z_6^* = 0.88 - j1.47$$

Zeroul complex $z_3 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$, aflându-se pe cercul unitate ($|z_3| = 1$), determină existența zeroului complex-conjugat: $z_8 = z_3^* = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$

Funcția de transfer corespunzătoare acestor zerouri va fi:

$$H(z) = \prod_{k=1}^{M=8} (1 - z_k z^{-1}) = 1 + 1.1353z^{-1} + 0.5635z^{-2} + 5.6841z^{-3} + 4.9771z^{-4} + 5.6841z^{-5} + 0.5635z^{-6} + 1.1353z^{-7} + z^{-8}$$

Problema 4 – FTJ cu 2 poli: Considerând un FTJ cu doi poli, caracterizat de funcția de sistem:

$H(z) = \frac{b_0}{(1 - pz^{-1})^2}$, se dorește determinarea valorile parametrilor b_0 și p , astfel încât răspunsul în

frecvență, $H(\omega)$, să satisfacă condițiile: $H(0) = 1$ și $\left|H\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|^2 = \frac{1}{2}$.

Răspunsul în frecvență corespunzător acestui FTJ este:

$$H(\omega) = \frac{b_0}{(1 - pe^{-j\omega})^2}$$

La frecvența $\omega = 0$, avem: $H(0) = \frac{b_0}{(1 - p)^2} = 1 \Leftrightarrow b_0 = (1 - p)^2$.

La frecvența $\omega = \pi/4$, avem:

$$H\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{b_0}{(1 - pe^{-j\frac{\pi}{4}})^2} = \frac{(1 - p)^2}{\left[1 - p\left(\cos\frac{\pi}{4} - j\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^2} = \frac{(1 - p)^2}{\left[\left(1 - p\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + jp\frac{\sqrt{2}}{2}\right]^2}$$

Deci

$$\left|H\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|^2 = \left[\frac{(1 - p)^2}{\left(1 - p\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(p\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\right]^2 = \frac{(1 - p)^4}{(1 - p\sqrt{2} + p^2)^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(1 - p)^4 = (1 - p\sqrt{2} + p^2)^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}(1-p)^2 = 1 - p\sqrt{2} + p^2 \Leftrightarrow p^2 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}p + 1 = 0 \Leftrightarrow p_{1,2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \pm \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right)^2 - 4}}{2}$$

Valoarea $p = 0.31$ satisface această ecuație. În consecință, funcția de sistem corespunzătoare filtrului dorit este:

$$H(z) = \frac{0.48}{(1 - 0.31z^{-1})^2}.$$

Problema 5 – FTB: Se urmărește proiectarea unui FTB, cu frecvența centrală la $\omega = \pi/2$ și cu caracteristica răspunsului în frecvență de valoare nulă la $\omega = 0$ și $\omega = \pi$. Valoarea modului răspunsului în frecvență este $1/\sqrt{2}$ la $\omega = 4\pi/9$.

Deoarece frecvența centrală este $\omega = \pi/2$, filtrul va avea polii: $p_{1,2} = re^{\pm j\frac{\pi}{2}}$.

Caracteristica răspunsului în frecvență are valoare nulă la $\omega = 0$ și $\omega = \pi$, deci zerourile vor fi: $z_1 = e^{-j0} = 1$ și $z_2 = e^{-j\pi} = -1$.

În consecință, funcția de sistem este:

$$H(z) = G \frac{(1-z^{-1})(1+z^{-1})}{(1-jrz^{-1})(1+jrz^{-1})} = G \frac{1-z^{-2}}{1+r^2z^{-2}}.$$

Factorul de câștig, G , se determină evaluând răspunsul în frecvență al filtrului, $H(\omega)$, la $\omega = \pi/2$, adică:

$$H\left(\frac{\pi}{2}\right) = G \frac{1 - e^{-2j\frac{\pi}{2}}}{1 + r^2 e^{-2j\frac{\pi}{2}}} = G \frac{2}{1 - r^2} = 1 \Rightarrow G = \frac{1 - r^2}{2}.$$

Valoarea lui r se determină evaluând răspunsul în frecvență, $H(\omega)$, la $\omega = 4\pi/9$, adică:

$$\begin{aligned} \left| H\left(\frac{4\pi}{9}\right) \right|^2 &= \left(\frac{1-r^2}{2} \left| \frac{1 - e^{-2j\frac{4\pi}{9}}}{1 + r^2 e^{-2j\frac{4\pi}{9}}} \right| \right)^2 = \frac{(1-r^2)^2}{4} \left| \frac{1 - \cos\frac{8\pi}{9} + j\sin\frac{8\pi}{9}}{1 + r^2 \cos\frac{8\pi}{9} - jr^2 \sin\frac{8\pi}{9}} \right|^2 \\ &= \frac{(1-r^2)^2}{4} \frac{\left(1 - \cos\frac{8\pi}{9}\right)^2 + \sin^2\frac{8\pi}{9}}{\left(1 + r^2 \cos\frac{8\pi}{9}\right)^2 + r^4 \sin^2\frac{8\pi}{9}} = \frac{(1-r^2)^2}{4} \frac{2 - 2\cos\frac{8\pi}{9}}{1 + 2r^2 \cos\frac{8\pi}{9} + r^4} = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow (1-r^2)^2 \left(2 - 2\cos\frac{8\pi}{9}\right) &= 2 \left(1 + 2r^2 \cos\frac{8\pi}{9} + r^4\right) \Leftrightarrow r^4 - 2.13r^2 + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow r_{1,2}^2 &= \frac{2.13 \pm \sqrt{4.5369 - 4}}{2} = 1.065 \pm 0.37 \end{aligned}$$

r^2 trebuie să aibă o valoare subunitară, ca atare soluția aleasă este $r^2 = 0.69$, de unde valoarea câștigului este $G = 0.155$.

Funcția de sistem corespunzătoare FTB proiectat este:

$$H(z) = 0.155 \frac{1 - z^{-2}}{1 + 0.69z^{-2}}.$$

Problema 6 – Filtru de rejecție obținut din FTS: Acest exemplu ilustrează convertirea unui FTS într-un filtru de rejecție. Se consideră un FTS cu funcția de sistem: $H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - az^{-1}}$, $a < 1$, și se dorește obținerea unui filtru de rejecție, ce rejectează frecvența $\omega_0 = \pi/4$ și armonicele corepunzătoare.

Probleme rezolvate

Pentru filtrul de rejecție se vor determina ecuația cu diferențe finite și coeficienți constanți și diagrama poli-zerouri.

Frecvențele ce trebuie rejectate sunt: $\omega = \left\{ 0, \pm \frac{\pi}{4}, \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{4}, \pi \right\}$, ca atare funcția de transfer va fi de ordin 8 (trebuie să aibă 8 zerouri):

$$H(z) = \frac{1 - z^{-8}}{1 - az^{-8}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

Ecuația cu diferențe finite corespunzătoare este:

$$y(n) = ay(n-8) + x(n) - x(n-8)$$

Funcția de sistem corespunzătoare filtrului de rejecție are zerouri la $z = \left\{ 1, e^{\pm j\frac{\pi}{4}}, e^{\pm j\frac{\pi}{2}}, e^{\pm j\frac{3\pi}{4}}, -1 \right\}$

și poli la $p = \left\{ a^{\frac{1}{8}}, a^{\frac{1}{8}} e^{\pm j\frac{\pi}{4}}, a^{\frac{1}{8}} e^{\pm j\frac{\pi}{2}}, a^{\frac{1}{8}} e^{\pm j\frac{3\pi}{4}}, -a^{\frac{1}{8}} \right\}$.

Răspunsul în frecvență al filtrului de rejecție este dat de relația

$$H(\omega) = \frac{1 - e^{-j8\omega}}{1 - ae^{-j8\omega}} = \frac{e^{-j4\omega} (e^{j4\omega} - e^{-j4\omega})}{1 - a \cos 8\omega + ja \sin 8\omega} = \frac{e^{-j4\omega} 2 \cos 4\omega}{1 - a \cos 8\omega + ja \sin 8\omega}$$

$$\Rightarrow |H(\omega)| = \frac{2 |\cos 4\omega|}{\sqrt{1 - 2a \cos 8\omega + a^2}}$$

$$\Rightarrow \angle H(\omega) = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{\arcsin 8\omega}{1 - \arccos 8\omega}\right), & \cos 4\omega \geq 0 \\ \pi - \arctan\left(\frac{\arcsin 8\omega}{1 - \arccos 8\omega}\right), & \cos 4\omega < 0 \end{cases}$$

Răspunsul în frecvență al FTS este dat de relația:

$$H(\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega}}{1 - ae^{-j\omega}} = \frac{e^{-j\frac{\omega}{2}} 2 \cos \frac{\omega}{2}}{1 - a \cos \omega + ja \sin \omega}$$

Pentru FTS modulul răspunsului în frecvență este:

$$|H(\omega)| = \frac{2 \left| \cos \frac{\omega}{2} \right|}{\sqrt{1 - 2a \cos \omega + a^2}},$$

iar faza răspunsului în frecvență:

$$\angle H(\omega) = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{\arcsin \omega}{1 - \arccos \omega}\right), & \cos \frac{\omega}{2} \geq 0 \\ \pi - \arctan\left(\frac{\arcsin \omega}{1 - \arccos \omega}\right), & \cos \frac{\omega}{2} < 0 \end{cases}$$

Capitolul 2 – Filtre cu răspuns finit la impuls

Problema 7 – Evaluarea răspunsului în frecvență: Se consideră un sistem LTI cu răspunsul la impuls, $h(n)$, real și lungimea M , pară. Se dorește determinarea răspunsului în frecvență, $H(\omega)$, știind că

partea reală a răspunsului în frecvență este $H_R(\omega) = \frac{1 - a \cos \omega}{1 - 2a \cos \omega + a^2}$, $|a| < 1$.

Prima dată evaluăm secvența pară $h(n)$, pe care o notăm $h_{par}(n)$. Menționăm că

$$H_R(\omega) = H_R(z) \Big|_{z=e^{j\omega}},$$

unde

$$\begin{aligned}
 H_R(z) &= \frac{1 - a \frac{z + z^{-1}}{2}}{1 - 2a \frac{z + z^{-1}}{2} + a^2} = \frac{z^{-1} - a \frac{1 + z^{-2}}{2}}{z^{-1} - a - az^{-2} + a^2 z^{-1}} = \frac{z^{-1} - a \frac{1 + z^{-2}}{2}}{(z^{-1} - a) - az^{-1}(z^{-1} - a)} \\
 &= \frac{z^{-1} - a \frac{1 + z^{-2}}{2}}{(z^{-1} - a)(1 - az^{-1})} = \frac{-\frac{1}{a} \left(z^{-1} - a \frac{1 + z^{-2}}{2} \right)}{\left(1 - \frac{1}{a} z^{-1} \right) (1 - az^{-1})} = \frac{\frac{1 + z^{-2}}{2} - \frac{1}{a} z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{a} z^{-1} \right) (1 - az^{-1})}
 \end{aligned}$$

Se observă că polii sunt $p_1 = a$ și $p_2 = 1/a$. Sistemul fiind stabil, cercul unitate este cuprins în regiunea de convergență, care va fi un inel circular cuprins între p_1 și p_2 , care conține cercul unitate. Adică, regiunea de convergență (ROC – Region of Convergence) este:

$$\text{ROC: } |a| < |z| < \frac{1}{|a|}.$$

În consecință, $h_{par}(n)$ este o secvență bilaterală, în care polul $p_1 = a$ determină o parte cauzală, iar polul $p_2 = 1/a$, o parte necauzală. Aplicând transformata în z inversă lui $H_R(z)$, vom obține secvența $h_{par}(n)$. În prealabil $H_R(z)$ trebuie descompus în fracții simple:

$$\begin{aligned}
 H_R(z) &= \frac{A_1}{1 - \frac{1}{a} z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - az^{-1}} \\
 \Rightarrow A_1 \Big|_{z^{-1}=a} &= \frac{\frac{1 + z^{-2}}{2} - \frac{1}{a} z^{-1}}{1 - az^{-1}} \Bigg|_{z^{-1}=a} = \frac{\frac{1 + a^2}{2} - \frac{1}{a} a}{1 - a \cdot a} = \frac{1 + a^2 - 2}{2(1 - a^2)} = -\frac{1 - a^2}{2(1 - a^2)} = -\frac{1}{2} \\
 \Rightarrow A_2 \Big|_{z^{-1}=\frac{1}{a}} &= \frac{\frac{1 + z^{-2}}{2} - \frac{1}{a} z^{-1}}{1 - \frac{1}{a} z^{-1}} \Bigg|_{z^{-1}=\frac{1}{a}} = \frac{1 + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a} \frac{1}{a}}{1 - \frac{1}{a} \frac{1}{a}} = \frac{\frac{a^2 + 1 - 2}{a^2}}{2 \left(1 - \frac{1}{a^2} \right)} = \frac{a^2 - 1}{2(a^2 - 1)} = \frac{1}{2} \\
 \Rightarrow H_R(z) &= -\frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{a} z^{-1}} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - az^{-1}}.
 \end{aligned}$$

Partea pară a răspunsului la impuls va fi:

$$h_{par}(n) = Z^{-1} \{ H_R(z) \} = -\left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{a} \right)^n + \frac{1}{2} a^n = \frac{1}{2} a^{-n} + \frac{1}{2} a^n = \frac{1}{2} a^{|n|} + \frac{1}{2} \delta(n).$$

Răspunsul la impuls în funcție de partea pară a răspunsului la impuls este:

$$h(n) = 2h_{par}(n)u(n) - h_{par}(0)\delta(n), \quad n \geq 0.$$

Deci, răspunsul total la impuls este:

$$h(n) = a^n u(n),$$

iar transformata sa Fourier:

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}.$$

Problema 8 – FTJ cu răspuns finit la impuls: Se urmărește determinarea funcției de sistem, răspunsului în frecvență, răspunsului la impuls (simetric) și ecuației de intare-ieșire corespunzătoare unui FTJ FIR de fază liniară, de lungime 4, al cărui răspuns în frecvență satisface condițiile:

$$H_R(0) = 1 \text{ și } H_R\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Probleme rezolvate

Fiind vorba despre un filtru FIR, de lungime $M = 4$, funcția de sistem este:

$$H(z) = \sum_{k=0}^3 b_k z^{-k} = \sum_{k=0}^3 h(k) z^{-k} = h(0) + h(1)z^{-1} + h(2)z^{-2} + h(3)z^{-3}$$

Răspunsul la impuls fiind simetric și $M = 4$, avem:

$$h(n) = h(M-1-n) \Rightarrow \begin{cases} h(0) = h(3) \\ h(1) = h(2) \end{cases}$$

Ca atare, funcția de sistem poate fi scrisă ca:

$$H(z) = h(0) + h(1)z^{-1} + h(1)z^{-2} + h(0)z^{-3}$$

Știind că:

$$H(\omega) = H(z)|_{z=e^{j\omega}}$$

răspunsul în frecvență este:

$$H(\omega) = h(0) + h(1)e^{-j\omega} + h(1)e^{-2j\omega} + h(0)e^{-3j\omega}$$

Filtrul FIR, fiind de fază liniară:

$$\begin{aligned} H(\omega) &= e^{-j\frac{3\omega}{2}} \left[h(0)e^{j\frac{3\omega}{2}} + h(1)e^{j\frac{\omega}{2}} + h(1)e^{-j\frac{\omega}{2}} + h(0)e^{-j\frac{3\omega}{2}} \right] \\ &= e^{-j\frac{3\omega}{2}} \left[h(0) \left(e^{j\frac{3\omega}{2}} + e^{-j\frac{3\omega}{2}} \right) + h(1) \left(e^{j\frac{\omega}{2}} + e^{-j\frac{\omega}{2}} \right) \right] \\ &= e^{-j\frac{3\omega}{2}} \left(2h(0) \cos \frac{3\omega}{2} + 2h(1) \cos \frac{\omega}{2} \right) = 2e^{-j\frac{3\omega}{2}} \left(h(0) \cos \frac{3\omega}{2} + h(1) \cos \frac{\omega}{2} \right) \end{aligned}$$

Din

$$H_R(0) = 1 \text{ și } H_R\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

vom obține un sistem de două ecuații cu două necunoscute, adică:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2(h(0) + h(1)) = 1 \\ 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}h(0) + \frac{\sqrt{2}}{2}h(1)\right) = \frac{1}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} h(0) + h(1) = \frac{1}{2} \\ -h(0) + h(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h(0) = \frac{1}{2} - h(1) \\ -\frac{1}{2} + h(1) + h(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} h(0) = \frac{1}{2} - h(1) \\ h(1) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h(0) = \frac{1}{2} - h(1) \\ h(1) = \frac{1 + \sqrt{2}}{4\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h(0) = \frac{2 - \sqrt{2}}{8} \\ h(1) = \frac{2 + \sqrt{2}}{8} \end{cases} \end{aligned}$$

Funcția de sistem corespunzătoare filtrului FIR este:

$$H(z) = \frac{2 - \sqrt{2}}{8} + \frac{2 + \sqrt{2}}{8}z^{-1} + \frac{2 + \sqrt{2}}{8}z^{-2} + \frac{2 - \sqrt{2}}{8}z^{-3} = \frac{2 - \sqrt{2}}{8}(1 + z^{-3}) + \frac{2 + \sqrt{2}}{8}(z^{-1} + z^{-2})$$

iar răspunsul în frecvență

$$H(\omega) = 2e^{-j\frac{3\omega}{2}} \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{8} \cos \frac{3\omega}{2} + \frac{2 + \sqrt{2}}{8} \cos \frac{\omega}{2} \right) = \frac{1}{4} e^{-j\frac{3\omega}{2}} \left[(2 - \sqrt{2}) \cos \frac{3\omega}{2} + (2 + \sqrt{2}) \cos \frac{\omega}{2} \right]$$

Dar $H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\angle H(\omega)}$. În consecință, modulul răspunsului în frecvență este:

$$|H(\omega)| = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \left| \cos \frac{3\omega}{2} \right| + \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \left| \cos \frac{\omega}{2} \right|$$

iar faza răspunsului în frecvență:

$$\angle H(\omega) = \begin{cases} -\frac{3\omega}{2}, & \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \cos \frac{3\omega}{2} + \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \cos \frac{\omega}{2} > 0 \\ \pi - \frac{3\omega}{2}, & \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \cos \frac{3\omega}{2} + \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \cos \frac{\omega}{2} < 0 \end{cases}$$

Probleme rezolvate

Se poate evalua și timpul de întârziere de grup:

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d[\angle H(\omega)]}{d\omega} = \frac{3}{2}$$

Pentru filtrele FIR de fază liniară, pentru orice M (par sau impar), timpul de întârziere de grup are valoare constantă:

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d[\angle H(\omega)]}{d\omega} = \alpha = \frac{M-1}{2}$$

Răspunsul la impuls este:

$$h(n) = \left\{ \frac{2-\sqrt{2}}{8}, \frac{2+\sqrt{2}}{8}, \frac{2+\sqrt{2}}{8}, \frac{2-\sqrt{2}}{8} \right\} = \left\{ \underset{\uparrow}{0.073}, 0.427, 0.427, \underset{\uparrow}{0.073} \right\}$$

iar ecuația de intrare-ieșire:

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{2-\sqrt{2}}{8}x(n) + \frac{2+\sqrt{2}}{8}x(n-1) + \frac{2+\sqrt{2}}{8}x(n-2) + \frac{2-\sqrt{2}}{8}x(n-3) \\ &= \frac{2-\sqrt{2}}{8}[x(n) + x(n-3)] + \frac{2+\sqrt{2}}{8}[x(n-1) + x(n-2)] \end{aligned}$$

Capitolul 3 – Filtre cu răspuns infinit la impuls

Problema 9 – Obținerea unui filtru digital dintr-unul analogic prin metoda invarianței răspunsului la impuls: Se urmărește transformarea unui filtru analogic într-unul digital IIR, folosind metoda invarianței răspunsului la impuls.

Se consideră un filtru analogic descris prin funcția de sistem: $H_a(s) = \frac{s+0.2}{(s+0.2)^2 + 9}$.

Prima dată determinăm zeroul și polii funcției de sistem analogice:

$$s+0.2=0 \Rightarrow \text{zero} \quad z_1 = -0.2$$

$$(s+0.2)^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow s^2 + 0.4s + 9.04 = 0$$

$$\Rightarrow p_{1,2} = \frac{-0.4 \pm \sqrt{0.16 - 36.16}}{2} = \frac{-0.4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-0.4 \pm j6}{2} = -0.2 \pm j3$$

$$\Rightarrow \text{polii} \quad \begin{cases} p_1 = -0.2 - j3 \\ p_2 = -0.2 + j3 \end{cases}$$

Cei doi poli au valori complex-conjugate.

Pentru proiectarea filtrului IIR nu trebuie determinat răspunsul la impuls $h_a(t)$, ci se determină direct $H(z)$, după ce în prealabil $H_a(s)$ se descompune în fracții simple, astfel:

$$\begin{aligned} H_a(s) &= \frac{A_1}{s+0.2+j3} + \frac{A_2}{s+0.2-j3} \\ \Rightarrow A_1 \Big|_{s=-0.2-j3} &= \frac{s+0.2}{s+0.2-j3} \Big|_{s=-0.2-j3} = \frac{-0.2-j3+0.2}{-0.2-j3+0.2-j3} = \frac{-j3}{-j6} = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow A_2 \Big|_{s=-0.2+j3} &= \frac{s+0.2}{s+0.2+j3} \Big|_{s=-0.2+j3} = \frac{-0.2+j3+0.2}{-0.2+j3+0.2+j3} = \frac{j3}{j6} = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow H_a(s) &= \frac{1}{2} \frac{1}{s+0.2+j3} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+0.2-j3} \end{aligned}$$

Pe baza relațiilor (3.13)÷(3.15)

$$\begin{aligned} H_a(s) &= \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{s-p_k}, & H(z) &= \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{1-e^{p_k T} z^{-1}} \\ z_k &= e^{p_k T}, & k &= \overline{1, N} \end{aligned}$$

Probleme rezolvate

obținem funcția de transfer a filtrului digital, de forma :

$$H(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - e^{-0.2T} e^{-j3T} z^{-1}} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - e^{-0.2T} e^{j3T} z^{-1}}$$

Cei doi poli complex-conjugați pot fi combinați pentru a forma un filtru cu doi poli, cu funcția de sistem:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{2} \frac{1 - e^{-0.2T} e^{j3T} z^{-1} + 1 - e^{-0.2T} e^{-j3T} z^{-1}}{(1 - e^{-0.2T} e^{-j3T} z^{-1})(1 - e^{-0.2T} e^{j3T} z^{-1})} = \frac{1}{2} \frac{2 - e^{-0.2T} z^{-1} (e^{j3T} + e^{-j3T})}{1 - e^{-0.2T} z^{-1} (e^{j3T} + e^{-j3T}) + e^{-0.4T} z^{-2}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2 - 2e^{-0.2T} z^{-1} \cos 3T}{1 - e^{-0.2T} z^{-1} \cos 3T + e^{-0.4T} z^{-2}} = \frac{1 - e^{-0.2T} z^{-1} \cos 3T}{1 - e^{-0.2T} z^{-1} \cos 3T + e^{-0.4T} z^{-2}} \end{aligned}$$

Se observă că eroarea de alias este mai semnificativă la $T = 0.5$, decât la $T = 0.1$. Odată cu modificarea lui T , frecvența de rezonanță se deplasează; pentru valori mici a lui T , eroarea de alias este micșorată.

Problema 10 – Obținerea unui filtru digital dintr-unul analogic prin metoda transformării biliniare: Acest exemplu urmărește transformarea unui filtru analogic într-unul digital IIR, folosind metoda invarianței răspunsului la impuls.

Se consideră un filtru analogic descris prin funcția de sistem: $H_a(s) = \frac{s + 0.05}{(s + 0.05)^2 + 16}$. Filtrul

digital trebuie să aibă frecvența de rezonanță la $\omega_r = \pi/2$.

Se observă că frecvența de rezonanță corespunzătoare filtrului analogic este $\Omega_r = 4$. Această frecvență analogică trebuie mapată în frecvența discretă $\omega_r = \pi/2$, selectând o valoare corespunzătoare pentru parametrul T . Din relația (3.22)

$$\Omega_r = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega_r}{2} = \frac{2}{T} \tan \frac{\pi}{4} = \frac{2}{T},$$

rezultă că $T = 1/2$. În concluzie, maparea care trebuie făcută conform relației (3.17) $s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$,

pentru obținerea filtrului digital este: $s = 4 \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$.

Filtrul digital va avea funcția de sistem:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{4 \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} + 0.05}{\left(4 \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} + 0.05\right)^2 + 16} = \frac{4 \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} + 0.05}{16 \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right)^2 + 0.4 \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} + 16.0025} \\ &= \frac{4(1 - z^{-1})(1 + z^{-1}) + 0.05(1 + z^{-1})^2}{16(1 - z^{-1})^2 + 0.4(1 - z^{-1})(1 + z^{-1}) + 16.0025(1 + z^{-1})^2} \\ &= \frac{4.05 + 0.05z^{-1} - 3.95z^{-2}}{32.4025 + 0.005z^{-1} + 31.6025z^{-2}} = \frac{0.12499 + 0.00154z^{-1} - 0.1219z^{-2}}{1 + 0.00015z^{-1} + 0.97531z^{-2}} \end{aligned}$$

Obsevăm că la numitor, coeficientul lui z^{-1} are o valoare mică (poate fi aproximat cu zero. Funcția de sistem $H(z)$ va fi în acest caz:

$$H(z) = \frac{0.12499 + 0.00154z^{-1} - 0.1219z^{-2}}{1 + 0.97531z^{-2}}$$

Poli și zerourile acestui filtru sunt:

$$p_{1,2} = 0.98758e^{\pm j\frac{\pi}{2}}$$

$$z_1 = -0.99376, \quad z_2 = 3.99416$$

În acest exemplu, parametrul T a fost ales astfel încât frecvența de rezonanță corespunzătoare filtrului analogic să corespundă cu frecvența de rezonanță a filtrului digital.

Probleme rezolvate

De obicei, proiectarea filtrului începe cu specificațiile în domeniul digital. Aceste specificații în frecvență sunt transformate în domeniul analogic, prin relația (3.22) $\Omega = 2/T \tan(\omega/2)$.

Filtrul analogic este proiectat pentru aceste specificații și convertit într-un filtru digital prin transformarea biliniară (3.17). În această procedură parametrul T dispare din expresia lui $H(z)$, astfel încât poate avea o valoare arbitrară. **Problema 11** ilustrează acest lucru.

Problema 11 – Obținerea unui FTJ digital dintr-unul analogic prin metoda transformării biliniare: Se dorește proiectare unui FTJ IIR, pornind de la un FTJ analogic, folosind metoda transformării biliniare.

Se urmărește proiectarea unui FTJ, cu un singur pol, cu lățimea de bandă 0.3π la 3 dB, prin transformarea biliniară aplicată filtrului analogic $H_a(s) = \frac{\Omega_p}{s + \Omega_p}$, unde Ω_p este lățimea de bandă a filtrului analogic la 3 dB.

În domeniul analogic, frecvența discretă $\omega_p = 0.3\pi$ corespunde la

$$\Omega_p = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega_p}{2} = \frac{2}{T} \tan \frac{0.3\pi}{2} = \frac{1.02}{T}$$

Funcția de sistem corespunzătoare filtrului analogic este

$$H_a(s) = \frac{1.02}{s + \frac{1.02}{T}}$$

Aplicând transformarea biliniară, rezultă:

$$H(z) = \frac{\frac{1.02}{T}}{\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + \frac{1.02}{T}} = \frac{1.02(1+z^{-1})}{3.02 - 0.98z^{-1}} = \frac{0.3377(1+z^{-1})}{1 - 0.3245z^{-1}}$$

Răspunsul în frecvență corespunzător filtrului digital este:

$$H(\omega) = \frac{0.3377(1 + e^{-j\omega})}{1 - 0.3245e^{-j\omega}}$$

La $\omega = 0$, $H(0) = 1$ și la $\omega = 0.3\pi$, $|H(0.3\pi)| = 0.707$ (răspunsul dorit).

Problema 12 – Metoda Padé, parametrii IIR: Acest exemplu urmărește evaluarea parametrilor unui filtru IIR pentru care se știe răspunsul al impuls dorit, $h_d(n)$, folosind metoda Padé.

Se presupune că răspunsul la impuls dorit este: $h_d(n) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$. Se vor determina parametrii

filtrului cu funcția de sistem: $H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$, folosind aproximarea Padé.

În acest exemplu, $H(z)$ se poate potrivi exact cu $H_d(z)$, selectând parametrii după cum urmează:

$$b_0 = 2, \quad b_1 = 0, \quad a_1 = -\frac{1}{2}.$$

Vom aplica acum aproximarea Padé, să vedem dacă într-adevăr obținem același rezultat. Considerând la intrarea lui $H(z)$ impulsul unitate, obținem răspunsul la impuls

$$h(n) = -a_1 h(n-1) + b_0 \delta(n) + b_1 \delta(n-1)$$

Pentru $n \geq 1$ avem

$$h(n) = -a_1 h(n-1) \Leftrightarrow h_d(n) = -a_1 h_d(n-1)$$

Înlocuind $h_d(n)$ dat inițial în ultima relație, obținem:

$$3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot u(n) = -a_1 \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot u(n-1) \Leftrightarrow \frac{1}{3}u(n) = -a_1u(n-1) \Rightarrow a_1 = -\frac{1}{3}$$

Pentru a afla constantele b_0 și b_1 folosim relația

$$h(n) = -a_1h(n-1) - a_2h(n-2) - \dots - a_Nh(n-N) + b_n$$

cu condiția $h(n) = h_d(n)$. Considerând $n=0$ îl obținem pe b_0

$$1 = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3 + b_0 \Rightarrow b_0 = 2$$

Considerând $n=0$ îl obținem pe b_1

$$3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot 3 + b_1 \Rightarrow b_1 = 0$$

În concluzie

$$H(z) = H_d(z).$$

Acest exemplu arată că aproximarea Padé are ca rezultat o potrivire perfectă cu $H_d(z)$, când funcția de sistem dorită este o funcție rațională și se cunoaște numărul de poli și zerouri din funcția de sistem.

Acesta lucru nu se întâmplă în general în practică, deoarece $h_d(n)$ se determină din specificațiile răspunsului dorit în frecvență, $H_d(\omega)$. O soluție de a obține o aproximare bună a filtrului dorit cu metoda Padé, este de a încerca diverse valori pentru M și N , până când răspunsul în frecvență al filtrului rezultat converge la răspunsul în frecvență dorit cu o eroare de aproximare acceptabil de mică.

Problema 13 – Proiectare FTB: Se dorește proiectarea unui FTB, calat pe frecvența $\omega_0 = \pi/2$, pentru care: $\left|H\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| = \frac{1}{2}$. Se va determina funcția de sistem corespunzătoare și răspunsul la impuls.

Fiind vorba despre un FTB calat pe frecvența ω_0 , polii corespunzători sunt:

$$p_{1,2} = re^{\pm j\omega_0} = re^{\pm j\frac{\pi}{2}} = r\left(\cos\frac{\pi}{2} \pm j\sin\frac{\pi}{2}\right) = \pm jr,$$

iar funcția de transfer este:

$$H(z) = \frac{G}{(1-p_1z^{-1})(1-p_2z^{-1})} = \frac{G}{(1+jrz^{-1})(1-jrz^{-1})} = \frac{G}{1+r^2z^{-2}}$$

Vom evalua acum răspunsul în frecvență corespunzător FTB:

$$H(\omega) = H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{G}{1+r^2e^{-j2\omega}} = \frac{G}{1+r^2(\cos 2\omega - j\sin 2\omega)}$$

Modulul răspunsului în frecvență este:

$$|H(\omega)| = \frac{G}{\sqrt{(1+r^2\cos 2\omega)^2 + (r^2\sin 2\omega)^2}} = \frac{G}{\sqrt{1+2r^2\cos 2\omega+r^4}}$$

Dar

$$\left|H\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = 1 \text{ și } \left|H\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| = \frac{1}{2},$$

ca atare vom avea un sistem de două ecuații cu două necunoscute:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{G}{\sqrt{1+2r^2 \cos\left(2\frac{\pi}{2}\right)+r^4}} = 1 \\ \frac{G}{\sqrt{1+2r^2 \cos\left(2\frac{\pi}{4}\right)+r^4}} = \frac{1}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{G^2}{1-2r^2+r^4} = 1 \\ \frac{G^2}{1+r^4} = \frac{1}{4} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} G^2 = \frac{1+r^4}{4} \\ \frac{1+r^4}{4} = 1-2r^2+r^4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} G^2 = \frac{1+r^4}{4} \\ 3r^4 - 8r^2 + 3 = 0 \end{array} \right.$$

$$3r^4 - 8r^2 + 3 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-36}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} t_1 = \frac{4-\sqrt{7}}{3} = 0.45 \Rightarrow r_{1,2} = \pm 0.67 \\ t_2 = \frac{4+\sqrt{7}}{3} = 2.22 \Rightarrow r_{3,4} = \pm 1.49 \end{array} \right.$$

Valoare lui r trebuie să fie pozitivă și subunitară, așa că alegem $r = 0.67 \Rightarrow G = \sqrt{\frac{1+r^4}{4}} = 0.55$.

Funcția de transfer este: $H(z) = \frac{0.55}{1+0.45z^{-2}}$.

Pentru a obține răspunsul la impuls, trebuie să despărțim $H(z)$ în fracții simple:

$$H(z) = \frac{0.275}{1+j0.67z^{-1}} + \frac{0.275}{1-j0.67z^{-1}}$$

$$\Rightarrow h(n) = \left[0.275(-j0.67)^n + 0.275(j0.67)^n \right] u(n) = 0.275(j0.67)^n \left[(-1)^n + 1 \right] u(n)$$

Capitolul 4 – Structuri pentru implementarea sistemelor discrete

Problema 14 – Filtru FIR: Acest exemplu urmărește descrierea modului de realizare a formei directe și a celei laticiale pentru un filtru FIR.

Se va realiza implementarea în formă directă și laticială și se vor determina ecuațiile de intrare-ieșire corespunzătoare, pentru filtrul FIR cu funcția de sistem:

$$H(z) = 1 + \frac{13}{24}z^{-1} + \frac{5}{8}z^{-2} + \frac{1}{3}z^{-3}$$

Funcția de transfer pentru un filtru FIR este dată de relația (4.4), iar răspunsul la impuls al acestuia este identic cu coeficienții b_k . Pentru filtrul considerat $M = 4$; răspunsul la impuls este:

$$h(n) = \left\{ \uparrow, \frac{13}{24}, \frac{5}{8}, \frac{1}{3} \right\},$$

iar implementarea în formă directă este cea din figura 4.13.

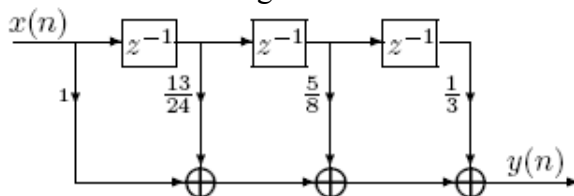


Figura 4.13. Forma directă pentru filtrul FIR $H(z) = 1 + \frac{13}{24}z^{-1} + \frac{5}{8}z^{-2} + \frac{1}{3}z^{-3}$

Ieșirea filtrului FIR este dată de relația (4.6), adică

$$y(n) = x(n) + \frac{13}{24}x(n-1) + \frac{5}{8}x(n-2) + \frac{1}{3}x(n-3)$$

Pentru implementarea laticială funcția de transfer a unui filtru FIR este $H(z) = A_{M-1}(z)$, adică

$$H(z) = A_3(z) = 1 + \frac{13}{24}z^{-1} + \frac{5}{8}z^{-2} + \frac{1}{3}z^{-3}$$

Probleme rezolvate

Se observă că $K_3 = \alpha_3(3) = \frac{1}{3}$. Polinomul reciproc al lui $A_3(z)$ este $B_3(z)$, dat de

$$B_3(z) = \frac{1}{3} + \frac{5}{8}z^{-1} + \frac{13}{24}z^{-2} + z^{-3}.$$

Folosind testul de stabilitate Schür-Cohn, dat de relația (4.52), pentru $m = 3$, obținem

$$\begin{aligned} A_2(z) &= \frac{A_3(z) - K_3 B_3(z)}{1 - K_3^2} = \frac{1 + \frac{13}{24}z^{-1} + \frac{5}{8}z^{-2} + \frac{1}{3}z^{-3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{5}{8}z^{-1} + \frac{13}{24}z^{-2} + z^{-3}\right)}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{9} + \frac{13}{24} - \frac{5}{24}z^{-1} + \frac{5}{8} - \frac{13}{72}z^{-2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}z^{-3}}{1 - \frac{1}{9}} = 1 + \frac{8}{24}z^{-1} + \frac{9}{72}z^{-2} \\ &\Rightarrow A_2(z) = 1 + \frac{3}{8}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}. \end{aligned}$$

Prin urmare $K_2 = \alpha_2(2) = \frac{1}{2}$, iar polinomul reciproc $B_2(z)$ este $B_2(z) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}z^{-1} + z^{-2}$.

Repetând decrementarea recursivă, pentru $m = 2$, obținem:

$$\begin{aligned} A_1(z) &= \frac{A_2(z) - K_2 B_2(z)}{1 - K_2^2} = \frac{1 + \frac{3}{8}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8}z^{-1} + z^{-2}\right)}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{4} + \frac{3}{8} - \frac{3}{16}z^{-1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z^{-2}}{1 - \frac{1}{4}} = 1 + \frac{3}{16}z^{-1} \\ &\Rightarrow A_1(z) = 1 + \frac{1}{4}z^{-1}. \end{aligned}$$

Prin urmare $K_1 = \alpha_1(1) = \frac{1}{4}$, iar polinomul reciproc $B_1(z)$ este $B_1(z) = \frac{1}{4} + z^{-1}$.

Implementarea laticială pentru acest filtru FIR este cea din figura 4.14.

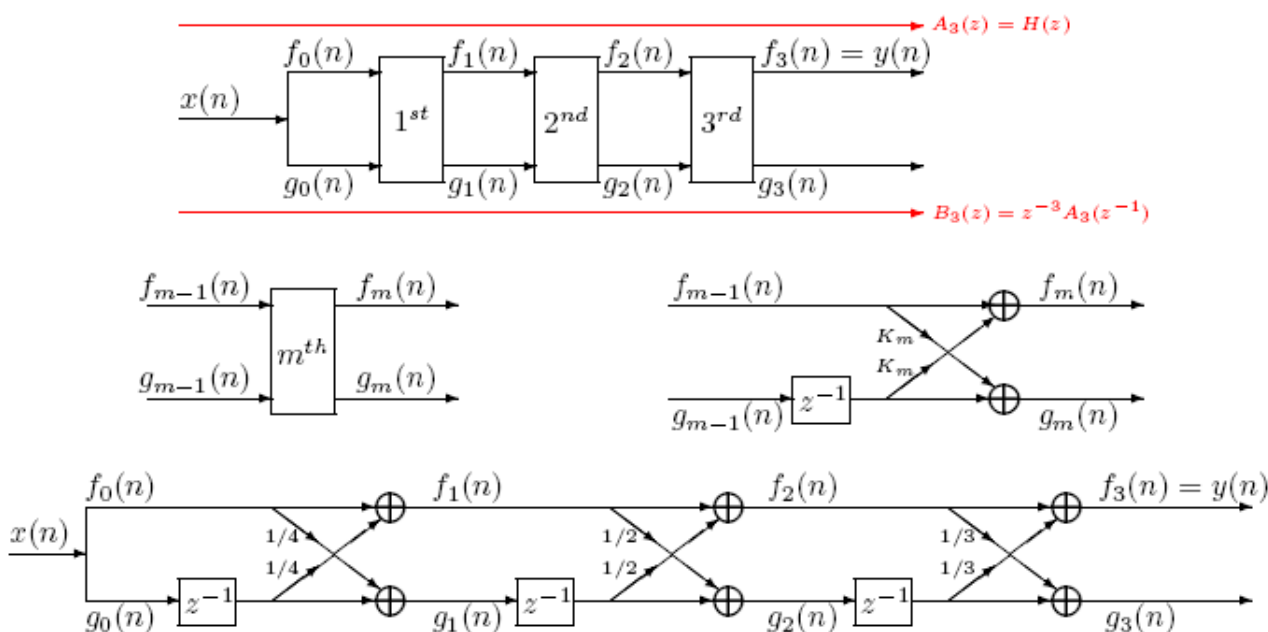


Figura 4.14. Structura laticială pentru filtrul FIR $H(z) = 1 + \frac{13}{24}z^{-1} + \frac{5}{8}z^{-2} + \frac{1}{3}z^{-3}$

Probleme rezolvate

Cu ajutorul ecuațiilor recursive (4.28), (4.29) și ținând cont de relația (4.27), putem evalua ieșirea $y(n)$. Începem cu evaluarea ieșirilor corespunzătoare primului stagi, adică pentru $m = 1$:

$$f_1(n) = f_0(n) + K_1 g_0(n-1) = x(n) + \frac{1}{4} x(n-1)$$

$$g_1(n) = K_1 f_0(n) + g_0(n-1) = \frac{1}{4} x(n) + x(n-1)$$

Continuăm cu $m = 2$, evaluând ieșirile celui de-al doilea stagi

$$f_2(n) = f_1(n) + K_2 g_1(n-1) = x(n) + \frac{1}{4} x(n-1) + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} x(n-1) + x(n-2) \right]$$

$$\Rightarrow f_2(n) = x(n) + \frac{3}{8} x(n-1) + \frac{1}{2} x(n-2)$$

$$g_2(n) = K_2 f_1(n) + g_1(n-1) = \frac{1}{2} \left[x(n) + \frac{1}{4} x(n-1) \right] + \frac{1}{4} x(n-1) + x(n-2)$$

$$\Rightarrow g_2(n) = \frac{1}{2} x(n) + \frac{3}{8} x(n-1) + x(n-2)$$

În cazul implementării laticiale, ieșirea $y(n)$ este dată de relația (4.30). Pentru $m = 3$, obținem ieșirea $y(n)$, corespunzătoare filtrului FIR

$$y(n) = f_3(n) = f_2(n) + K_3 g_2(n-1)$$

$$= x(n) + \frac{3}{8} x(n-1) + \frac{1}{2} x(n-2) + \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} x(n-1) + \frac{3}{8} x(n-2) + x(n-3) \right]$$

$$\Rightarrow y(n) = x(n) + \frac{13}{24} x(n-1) + \frac{5}{8} x(n-2) + \frac{1}{3} x(n-3).$$

Problema 15 – Determinarea filtrului FIR pe baza coeficienților laticiali: Se dorește determinarea funcției de transfer a unui filtru FIR, cunoscându-se coeficienții laticiali.

Se consideră coeficienții laticiali:

$$K_1 = \frac{1}{2}, \quad K_2 = -\frac{1}{3} \quad \text{și} \quad K_3 = \frac{1}{4},$$

corespunzători unei structuri laticiale cu trei stagii. Se va determina funcția de transfer $H(z)$ și coeficienții filtrului FIR pentru realizarea în formă directă $\alpha_m(k)$, răspunsul la impuls al filtrului $h(n)$ și ieșirea sistemului $y(n)$. În final se vor ilustra grafic structura laticială și implementarea în formă directă.

Pentru determinarea funcției de transfer și a coeficienților filtrului FIR pentru implementarea în formă directă, se vor utiliza relațiile (4.43)÷(4.45). Problema se rezolvă recursiv, începând cu $m = 1$

$$A_1(z) = A_0(z) + K_1 z^{-1} B_0(z) = 1 + \frac{1}{2} z^{-1}$$

Prin urmare, coeficienții filtrului FIR corespunzători structurii laticiale cu un singur stagi, sunt dați de relațiile (4.48)÷(4.50), adică

$$\alpha_1(0) = 1 \quad \alpha_1(1) = K_1 = \frac{1}{2}$$

Deoarece $B_m(z)$ este reciprocul lui $A_m(z)$ $\Rightarrow B_1(z) = \frac{1}{2} + z^{-1}$

Se adaugă al doilea stagi structurii laticiale. Pentru $m = 2$, rezultă

$$A_2(z) = A_1(z) + K_2 z^{-1} B_1(z) = 1 + \frac{1}{2} z^{-1} - \frac{1}{3} z^{-1} \left(\frac{1}{2} + z^{-1} \right) = 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) z^{-1} - \frac{1}{3} z^{-2} = 1 + \frac{1}{3} z^{-1} - \frac{1}{3} z^{-2}$$

Parametrii filtrului FIR corespunzători structurii laticiale cu două stagii sunt:

$$\alpha_2(0) = 1 \quad \alpha_2(1) = \frac{1}{3} \quad \alpha_2(2) = -\frac{1}{3}$$

Probleme rezolvate

iar polinomul reciproc $B_2(z)$ este $B_2(z) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}z^{-1} + z^{-2}$

În final, prin adăugarea celui de-al treilea stagiu în structura laticială, rezultă polinomul $A_3(z)$

$$\begin{aligned} A_3(z) &= A_2(z) + K_3 z^{-1} B_2(z) = 1 + \frac{1}{3}z^{-1} - \frac{1}{3}z^{-2} + \frac{1}{4}z^{-1} \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}z^{-1} + z^{-2} \right) \\ &= 1 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12} \right) z^{-1} + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{12} \right) z^{-2} + \frac{1}{4}z^{-3} = 1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{4}z^{-2} + \frac{1}{4}z^{-3} \end{aligned}$$

și, ca urmare, filtrul FIR în formă directă este caracterizat de coeficienții

$$\alpha_3(0) = 1 \quad \alpha_3(1) = \frac{1}{4} \quad \alpha_3(2) = -\frac{1}{4} \quad \alpha_3(3) = \frac{1}{4}$$

iar polinomul reciproc $B_3(z)$ este $B_3(z) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2} + z^{-3}$

În cazul sistemului FIR, funcția de transfer $H(z) = A_{M-1}(z)$, adică

$$H(z) = A_3(z) = 1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{4}z^{-2} + \frac{1}{4}z^{-3}$$

Pentru determinarea răspunsului la impuls se aplică transformata în z inversă funcției de sistem:

$$h(n) = Z^{-1}\{H(z)\} = \left\{ 1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right\}$$

Considerând relația (4.6), ieșirea sistemului este

$$y(n] = x(n) + \frac{1}{4}x(n-1) - \frac{1}{4}x(n-2) + \frac{1}{4}x(n-3)$$

Având dați coeficienții laticiali, implementarea corespunzătoare este cea din figura 4.15.

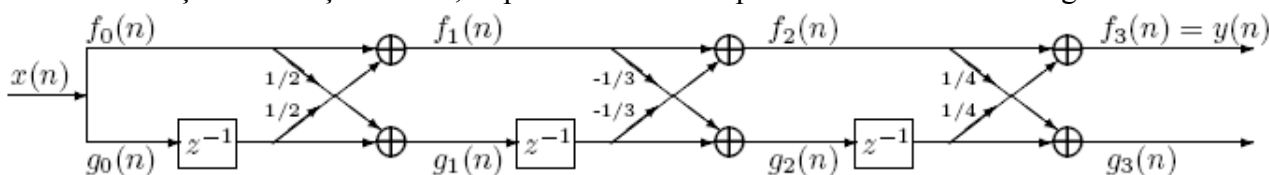


Figura 4.15. Structura laticială pentru filtrul FIR $H(z) = 1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{4}z^{-2} + \frac{1}{4}z^{-3}$

Cu coeficienții formeii directe evaluați anterior

$$\alpha_3(0) = 1 \quad \alpha_3(1) = \frac{1}{4} \quad \alpha_3(2) = -\frac{1}{4} \quad \alpha_3(3) = \frac{1}{4}$$

putem realiza implementarea acestui filtru, ca în figura 4.16.

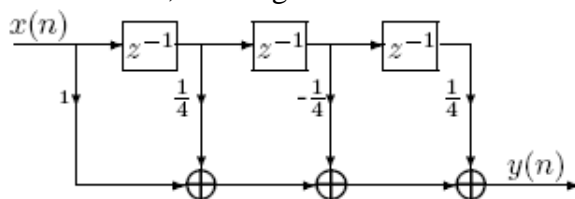


Figura 4.16. Structura directă pentru filtrul FIR $H(z) = 1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{4}z^{-2} + \frac{1}{4}z^{-3}$

Problema 16 – Filtru FIR, implementare cu eșantionare în frecvență: Se urmărește implementarea unui filtru cu răspuns finit la impuls, pentru care se cunosc valorile eșantioanelor în domeniul frecvență. Se va realiza atât implementarea în formă directă, cât și cea cu eșantionare în frecvență, pentru a evidenția complexitatea de calcul pentru cele două structuri.

Se consideră filtrul FIR cu fază liniară, cu $M = 15$ și $\alpha = 0$, descris de eșantioanele în frecvență:

$$H\left(\frac{2\pi k}{15}\right) = \begin{cases} 1, & k = \overline{0, 2}, \\ \frac{1}{3}, & k = 3, \\ 0, & k = \overline{4, 7}. \end{cases}$$

Probleme rezolvate

Deoarece filtrul este de fază liniară, răspunsul său la impuls prezintă o formă de simetrie, care va conduce, în cazul implementării în forma directă, la reducerea numărului de multiplicări de la 15 la 8. Numărul de sumatoare este 14. Diagrama bloc a formei directe de implementare este ilustrată în figura 4.17.

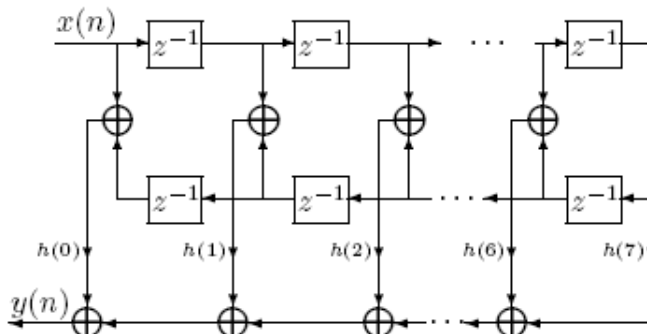


Figura 4.17. Implementarea în formă directă pentru filtrul FIR de fază liniară cu $M = 15$

Pentru implementarea cu eșantionare în frecvență folosim relațiile (4.17), (4.19), respectiv (4.21) și eliminăm toți coeficienții cu câștig zero, $H(k)$. Coeficienții cu câștig nenul sunt $H(k)$ și perechile corespunzătoare $H(M-k)$, pentru $k = \overline{0,3}$.

Pentru $M = 15$, funcțiile de transfer $H_1(z)$, respectiv $H_2(z)$ sunt:

$$H_1(z) = \frac{1}{15}(1 - z^{-15}),$$

$$H_2(z) = \frac{H(0)}{1 - z^{-1}} + \sum_{k=1}^{(15-1)/2} \frac{A(k) + B(k)z^{-1}}{1 - 2\cos\frac{2\pi k}{15}z^{-1} + z^{-2}}$$

$$= \frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{A(1) + B(1)z^{-1}}{1 - 2\cos\frac{2\pi}{15}z^{-1} + z^{-2}} + \frac{A(2) + B(2)z^{-1}}{1 - 2\cos\frac{4\pi}{15}z^{-1} + z^{-2}} + \frac{A(3) + B(3)z^{-1}}{1 - 2\cos\frac{6\pi}{15}z^{-1} + z^{-2}}$$

$$A(k) = H(k) + H(M-k), \quad B(k) = H(k)e^{-j\frac{2\pi k}{15}} + H(M-k)e^{j\frac{2\pi k}{15}}$$

Considerând răspunsul la impuls simetric, obținem succesiv:

1. pentru $k = 1$

$$A(1) = H(1) + H(14) = 2$$

$$B(1) = H(1)e^{-j\frac{2\pi}{15}} + H(14)e^{j\frac{2\pi}{15}} = 2\cos\frac{2\pi}{15}$$

2. pentru $k = 2$

$$A(2) = H(2) + H(13) = 2$$

$$B(2) = H(2)e^{-j\frac{4\pi}{15}} + H(13)e^{j\frac{4\pi}{15}} = 2\cos\frac{4\pi}{15}$$

3. pentru $k = 3$

$$A(3) = H(3) + H(12) = \frac{2}{3}$$

$$B(3) = H(3)e^{-j\frac{6\pi}{15}} + H(12)e^{j\frac{6\pi}{15}} = \frac{2}{3}\cos\frac{6\pi}{15}$$

În consecință, $H_2(z)$ este

$$H_2(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{2 + 2\cos\frac{2\pi}{15}z^{-1}}{1 - 2\cos\frac{2\pi}{15}z^{-1} + z^{-2}} + \frac{2 + 2\cos\frac{4\pi}{15}z^{-1}}{1 - 2\cos\frac{4\pi}{15}z^{-1} + z^{-2}} + \frac{\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\cos\frac{6\pi}{15}z^{-1}}{1 - 2\cos\frac{6\pi}{15}z^{-1} + z^{-2}}$$

Probleme rezolvate

Deoarece $H(0) = 1$, filtrul cu un singur pol nu necesită operații de multiplicare. Cele trei filtre cu doi poli necesită trei multiplicări fiecare, deci, în total, nouă multiplicări. Numărul total de adunări este 14. Prin urmare, implementarea cu eșantionare în frecvență a filtrului FIR este, din punct de vedere al calculului, mult mai eficientă decât forma directă de implementare. Diagrama bloc pentru acest tip de implementare este cea din figura 4.18.

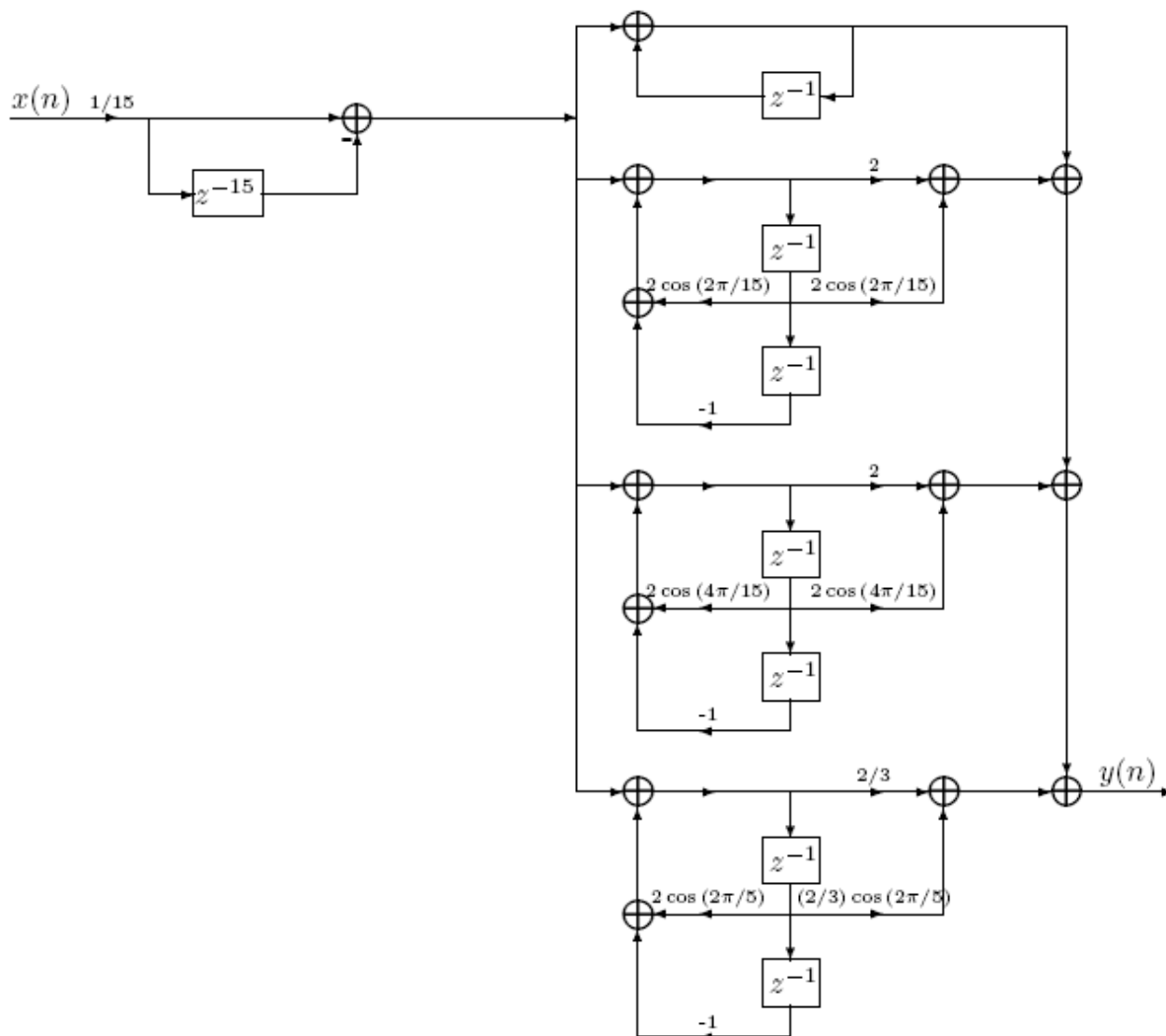


Figura 4.18. Implementarea cu eșantionare în frecvență, FIR de fază liniară, $M = 15$

Problema 17 – Filtru FIR, implementare cascadă: Acest exemplu ilustrează implementarea în forma cascadă pentru un sistem FIR, căruia i se cunoaște relația de intrare-ieșire.

Se consideră sistemul descris de ecuația cu diferențe finite și coeficienți constanți:

$$y(n) = x(n) - \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{7} x(n-1) - \frac{15}{16} x(n-2) + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{7} x(n-3) - \frac{1}{16} x(n-4)$$

Se va determina funcția de sistem corespunzătoare și se va implementa sistemul în forma cascadă.

Fiind vorba despre un sistem FIR, relația de intrare-ieșire este dată de ecuația (4.3), iar funcția de sistem de ecuația (4.4). Ca atare, funcția de transfer corespunzătoare acestui sistem este

$$H(z) = 1 - \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{7} z^{-1} - \frac{15}{16} z^{-2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{7} z^{-3} - \frac{1}{16} z^{-4}$$

Funcția de transfer se poate obține și aplicând transformata în z , ecuației cu diferențe finite:

$$Y(z) = X(z) - \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{7} z^{-1} X(z) - \frac{15}{16} z^{-2} X(z) + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{7} z^{-3} X(z) - \frac{1}{16} z^{-4} X(z)$$

$$\Leftrightarrow Y(z) = X(z) \left(1 - \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{7} z^{-1} - \frac{15}{16} z^{-2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{7} z^{-3} - \frac{1}{16} z^{-4} \right)$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 - \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{7} z^{-1} - \frac{15}{16} z^{-2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{7} z^{-3} - \frac{1}{16} z^{-4}$$

Probleme rezolvate

Implementarea în cascadă presupune scrierea funcției de sistem dată de relația (4.4) sub forma unui produs de factori $H_k(z)$, $k = \overline{1, K}$, ca în relația (4.8) unde, în cazul implementării cu module de ordinul doi:

$$H_k(z) = 1 + b_{k1}z^{-1} + b_{k2}z^{-2}.$$

Pentru că funcția de transfer este de ordinul patru, pentru implementarea în cascadă, avem:

$$H(z) = H_1(z)H_2(z)$$

În prealabil trebuie aflate rădăcinile funcției de transfer, adică zerourile funcției. Se observă că $z_1 = 1$ și $z_2 = -1$ sunt două dintre soluții, de unde rezultă:

$$H_1(z) = (1 - z_1z^{-1})(1 - z_2z^{-1}) = (1 - z^{-1})(1 + z^{-1}) = 1 - z^{-2}$$

Pentru aflarea lui $H_2(z)$, împărțim $H(z)$ la $H_1(z)$:

$$\begin{array}{r} 1 - \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{7} z^{-1} - \frac{15}{16} z^{-2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{7} z^{-3} - \frac{1}{16} z^{-4} \\ \hline -1 \qquad \qquad \qquad + z^{-2} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 1 - z^{-2} \\ \hline 1 - \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{7} z^{-1} + \frac{1}{16} z^{-2} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} / -\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{7} z^{-1} + \frac{1}{16} z^{-2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{7} z^{-3} - \frac{1}{16} z^{-4} \\ \hline -\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{7} z^{-1} \qquad \qquad -\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{7} z^{-3} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} / \qquad \qquad + \frac{1}{16} z^{-2} \qquad / \qquad \qquad -\frac{1}{16} z^{-4} \\ \hline / \qquad \qquad -\frac{1}{16} z^{-2} \qquad / \qquad \qquad + \frac{1}{16} z^{-4} \\ \hline / \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad / \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \end{array}$$

$$\Rightarrow H_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{7} z^{-1} + \frac{1}{16} z^{-2}$$

Zerourile lui $H_2(z)$ sunt

$$z_{3,4} = \frac{\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{7} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{7}\right)^2 - 4 \frac{1}{16}}}{2} = \frac{\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{7} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\cos^2 \frac{\pi}{7} - 1}}{2} = \frac{1}{2} \frac{\cos \frac{\pi}{7} \pm j \sin \frac{\pi}{7}}{2}$$

$$\Rightarrow z_{3,4} = \frac{1}{4} e^{\pm j \frac{\pi}{7}}$$

În concluzie, cele două funcții de sistem sunt:

$$H_1(z) = 1 - z^{-2} = (1 - z^{-1})(1 + z^{-1})$$

$$H_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{7} z^{-1} + \frac{1}{16} z^{-2} = \left(1 - \frac{1}{4} e^{-j \frac{\pi}{7}} z^{-1}\right) \left(1 - \frac{1}{4} e^{j \frac{\pi}{7}} z^{-1}\right)$$

iar implementarea în cascadă este ilustrată în figura 4.19.

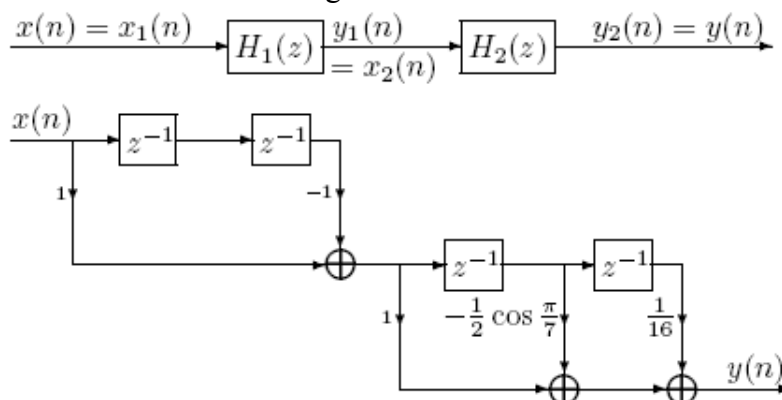


Figura 4.19. Implementarea în forma cascadă pentru filtrul FIR

Probleme rezolvate

Problema 18 – Filtru IIR, implementare directă, cascadă și paralelă: Se consideră un sistem cu poli și zerouri descris de funcția de sistem

$$H(z) = \frac{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{2}{3}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{5}e^{-j\frac{\pi}{3}}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{5}e^{j\frac{\pi}{3}}z^{-1}\right)}{(1 - z^{-1})(1 + z^{-1})\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)}$$

Se va determina ieșirea sistemului $y(n)$ și se va implementa sistemul în forma I directă, forma canonică, forma cascadă, respectiv forma paralelă.

Fiind vorba despre un sistem IIR cu poli și zerouri, ieșirea este dată de relația (4.1), iar funcția de transfer de relația (4.2). Pentru sistemul considerat $N = 4$ și $M = 4$. Funcția de transfer este:

$$H(z) = \frac{\left(1 + \frac{1}{6}z^{-1} - \frac{1}{3}z^{-2}\right)\left(1 - \frac{2}{5}\cos\frac{\pi}{3}z^{-1} + \frac{1}{25}z^{-2}\right)}{(1 - z^{-2})\left(1 - \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}z^{-1} + \frac{1}{16}z^{-2}\right)} = \frac{\left(1 + \frac{1}{6}z^{-1} - \frac{1}{3}z^{-2}\right)\left(1 - \frac{1}{5}z^{-1} + \frac{1}{25}z^{-2}\right)}{(1 - z^{-2})\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}z^{-1} + \frac{1}{16}z^{-2}\right)}$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{1 - \frac{1}{30}z^{-1} - \frac{49}{150}z^{-2} + \frac{11}{150}z^{-3} - \frac{1}{75}z^{-4}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{4}z^{-1} - \frac{15}{16}z^{-2} + \frac{\sqrt{2}}{4}z^{-3} - \frac{1}{16}z^{-4}}$$

Ieșirea, ținând cont de coeficienții a_k și b_k

$$a_1 = -\frac{\sqrt{2}}{4} \quad a_2 = -\frac{15}{16} \quad a_3 = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad a_4 = -\frac{1}{16}$$

$$b_0 = 1 \quad b_1 = -\frac{1}{30} \quad b_2 = -\frac{49}{150} \quad b_3 = \frac{11}{150} \quad b_4 = -\frac{1}{75}$$

este

$$y(n) = \frac{\sqrt{2}}{4}y(n-1) + \frac{15}{16}y(n-2) - \frac{\sqrt{2}}{4}y(n-3) + \frac{1}{16}y(n-4)$$

$$+ x(n) - \frac{1}{30}x(n-1) - \frac{49}{150}x(n-2) + \frac{11}{150}x(n-3) - \frac{1}{75}x(n-4)$$

Pentru implementarea sub forma I directă, funcția de sistem trebuie scrisă ca un produs de două funcții de sistem: una care conține toate zerourile funcției de transfer, și una care conține toți polii acesteia, ca în relațiile (4.55)÷(4.57). În cazul de față

$$H_1(z) = 1 - \frac{1}{30}z^{-1} - \frac{49}{150}z^{-2} + \frac{11}{150}z^{-3} - \frac{1}{75}z^{-4}$$

$$H_2(z) = \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{2}}{4}z^{-1} - \frac{15}{16}z^{-2} + \frac{\sqrt{2}}{4}z^{-3} - \frac{1}{16}z^{-4}}$$

iar implementarea sub forma I directă este cea din figura 4.20.

Dacă se plasează filtrul numai cu poli, înaintea celui care are doar zerouri, se obține forma canonică (forma a II-a directă), ca în figura 4.21.

Pentru implementarea sub forma cascadă sistemul trebuie divizat într-o cascadă de subsisteme de ordinul doi, ca în relația (4.58), unde fiecare subsistem este de forma (4.59). Rădăcinile complex-conjugate, atât pentru numărător, cât și pentru numitor, vor fi combinate împreună, pentru a evita calculele cu numere complexe. Sistemul propus va fi compus dintr-o cascadă de două subsisteme de ordinul al doilea, date de relațiile:

$$H_1(z) = \frac{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{2}{3}z^{-1}\right)}{(1 - z^{-1})(1 + z^{-1})} = \frac{1 + \frac{1}{6}z^{-1} - \frac{1}{3}z^{-2}}{1 - z^{-2}}$$

Probleme rezolvate

$$H_2(z) = \frac{\left(1 - \frac{1}{5}e^{-j\frac{\pi}{3}}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{5}e^{j\frac{\pi}{3}}z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{5}z^{-1} + \frac{1}{25}z^{-2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{4}z^{-1} + \frac{1}{16}z^{-2}}$$

Implementarea sub formă cascadă este ilustrată în figura 4.22.

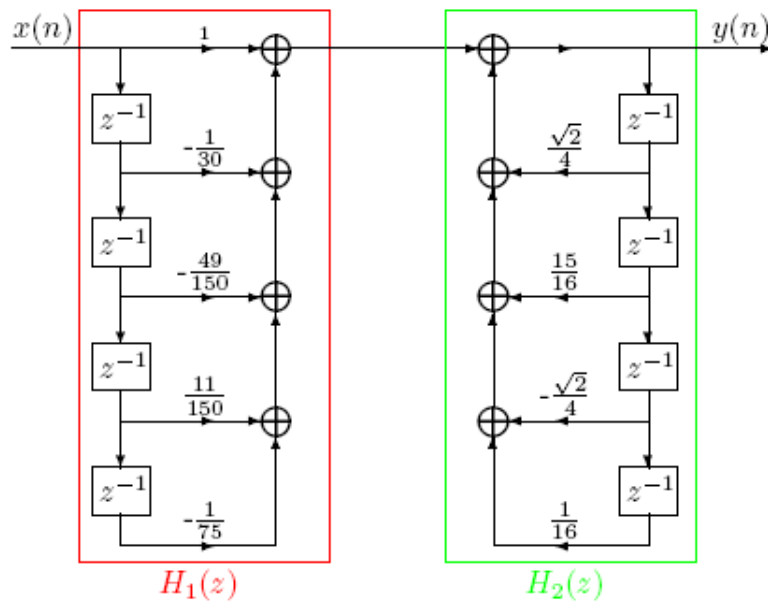


Figura 4.20. Forma I directă pentru sistemul IIR

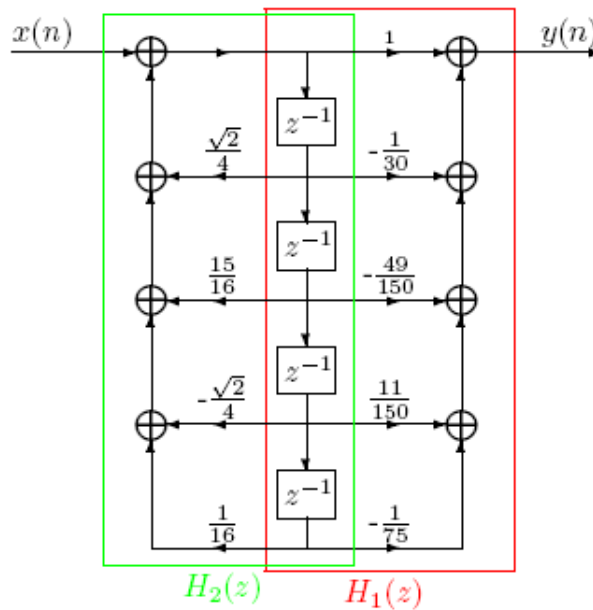


Figura 4.21. Forma canonică pentru sistemul IIR (forma a II-a directă)

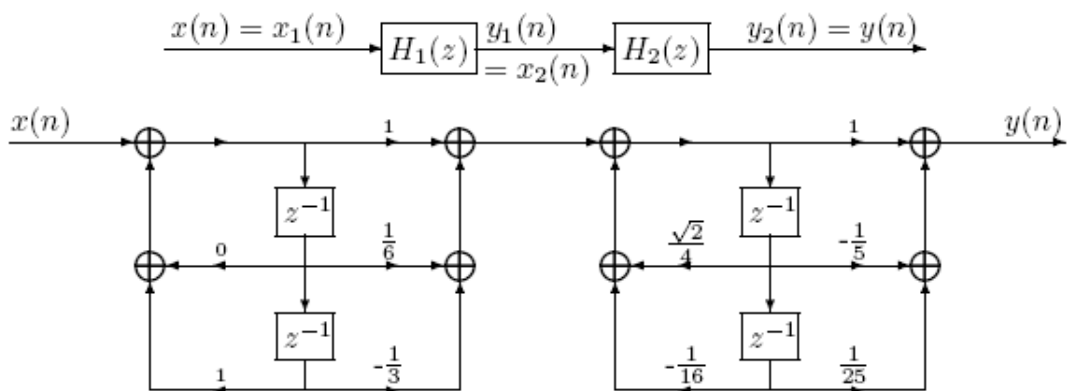


Figura 4.22. Implementarea cascadă pentru sistemul IIR

Probleme rezolvate

Pentru implementarea în paralel, funcția de transfer trebuie descompusă în fracții simple ca în relația (4.60). Vom descompune în fracții simple funcția de transfer, $H(z)$:

$$H(z) = \frac{A_1}{1-z^{-1}} + \frac{A_2}{1+z^{-1}} + \frac{A_3}{1-\frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}} + \frac{A_4}{1-\frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}}$$

Evaluând pentru $z^{-1}=1$, vom obține coeficientul A_1 , evaluând pentru $z^{-1}=-1$, vom obține coeficientul A_2 respectiv evaluând pentru $z^{-1}=\frac{4}{e^{-j\frac{\pi}{4}}}$, vom obține coeficientul A_3 .

$$A_1|_{z^{-1}=1} = \frac{1-\frac{1}{30}-\frac{49}{150}+\frac{11}{150}-\frac{1}{75}}{(1+1)\left(1-\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{16}\right)} = \frac{105}{150} \frac{8}{17-4\sqrt{2}} = \frac{28}{56.72}$$

$$\Rightarrow A_1 = 0.4937$$

$$A_2|_{z^{-1}=-1} = \frac{1+\frac{1}{30}-\frac{49}{150}-\frac{11}{150}-\frac{1}{75}}{(1+1)\left(1+\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{16}\right)} = \frac{93}{150} \frac{8}{17+4\sqrt{2}} = \frac{124}{566.42}$$

$$\Rightarrow A_2 = 0.2189$$

$$A_3|_{z^{-1}=\frac{4}{e^{-j\frac{\pi}{4}}}} = \frac{1-\frac{1}{30}\frac{4}{e^{-j\frac{\pi}{4}}}-\frac{49}{150}\left(\frac{4}{e^{-j\frac{\pi}{4}}}\right)^2+\frac{11}{150}\left(\frac{4}{e^{-j\frac{\pi}{4}}}\right)^3-\frac{1}{75}\left(\frac{4}{e^{-j\frac{\pi}{4}}}\right)^4}{\left(1-\frac{4}{e^{-j\frac{\pi}{4}}}\right)\left(1+\frac{4}{e^{-j\frac{\pi}{4}}}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{4}}\frac{4}{e^{-j\frac{\pi}{4}}}\right)}$$

$$= \frac{1-\frac{2e^{j\frac{\pi}{4}}}{15}-\frac{49\cdot 8e^{j\frac{\pi}{2}}}{75}+\frac{11\cdot 32e^{j\frac{3\pi}{4}}}{75}-\frac{256e^{j\pi}}{75}}{\left(1-16e^{j\frac{\pi}{2}}\right)\left(1-e^{j\frac{\pi}{2}}\right)}$$

$$= \frac{75-10\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-j392+352\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+256}{75(1-j17-16)} = \frac{331-181\sqrt{2}-j392+j171\sqrt{2}}{75(-15-j17)}$$

$$= \frac{75.066-j150.206}{75(-15-j17)} \cong \frac{75-j150}{75(-15-j17)} = \frac{1-j2}{-15-j17} = \frac{(1-j2)(-15+j17)}{(-15-j17)(-15+j17)} = \frac{19+j47}{514}$$

$$\Rightarrow A_3 = 0.037 + j0.091$$

Deoarece polii $p_3 = \frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{4}}$ și $p_4 = \frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{4}}$ au valori complex-conjugate și coeficienții A_3 și A_4 vor avea valori complex-conjugate, adică:

$$A_4 = A_3^* = 0.037 - j0.091$$

Funcția de transfer, $H(z)$, descompusă în fracții simple este:

$$H(z) = \underbrace{\frac{0.4937}{1-z^{-1}} + \frac{0.2189}{1+z^{-1}}}_{H_1(z)} + \underbrace{\frac{0.037 + j0.091}{1-\frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}} + \frac{0.037 - j0.091}{1-\frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}}}_{H_2(z)}$$

Pentru a evita operațiile cu numere complexe, se pot combina perechi de poli complex-conjugate pentru a forma subsisteme de ordinul al doilea cu coeficienți reali. Fiecare dintre aceste subsisteme va

Probleme rezolvate

avea funcția de sistem de forma (4.61). Vom grupa polii complex-conjugate, p_3 și p_4 împreună, respectiv polii reali p_1 și p_2 împreună, pentru a forma două subsisteme de ordinul al doilea. Astfel:

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z)$$

unde

$$H_1(z) = \frac{0.7126 + 0.2748z^{-1}}{1 - z^{-2}},$$

$$H_2(z) = \frac{0.07406 + 0.01927z^{-1}}{1 - 0.35355z^{-1} + 0.0625z^{-2}}.$$

Având funcțiile de transfer corespunzătoare celor două subsisteme din implementarea în forma paralelă, realizarea paralelă se poate face ca în figura 4.23.

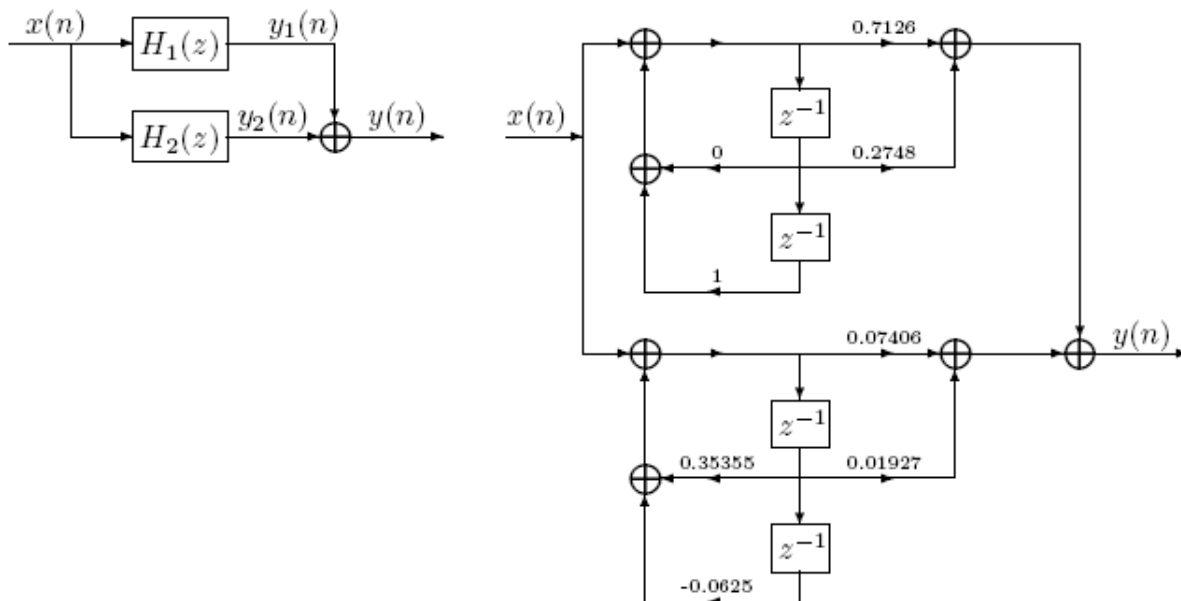


Figura 4.23. Implementarea paralelă pentru filtru IIR

Problema19 – Filtru IIR numai cu poli, structura laticială: Pentru sistemul IIR descris de funcția de transfer

$$H(z) = \frac{1}{1 + 0.9z^{-1} - 0.8z^{-2} + 0.5z^{-3}}$$

Se vor determina coeficienții laticiali, se va realiza implementarea laticială și se va evalua ieșirea sistemului.

Fiind un sistem laticial IIR numai cu poli, trebuie determinați doar coeficienții laticiali K_i , $i = \overline{1, N}$, folosind relațiile de decrementare ca la **Problema 14**. Pentru sistemul IIR doar cu poli, funcția de sistem este:

$$H(z) = \frac{1}{A_N(z)} = \frac{1}{A_3(z)}$$

$$\Rightarrow A_3(z) = 1 + 0.9z^{-1} - 0.8z^{-2} + 0.5z^{-3}$$

Se observă că

$$K_3 = \alpha_3(3) = 0.5 \Rightarrow B_3(z) = 0.5 - 0.8z^{-1} + 0.9z^{-2} + z^{-3}$$

Folosind testul de stabilitate Schür-Cohn, dat de relația (4.52), pentru $m = 3$, obținem

$$A_2(z) = \frac{A_3(z) - K_3 B_3(z)}{1 - K_3^2} = \frac{1 + 0.9z^{-1} - 0.8z^{-2} + 0.5z^{-3} - 0.5(0.5 - 0.8z^{-1} + 0.9z^{-2} + z^{-3})}{1 - (0.5)^2}$$

$$= \frac{1 - 0.25}{1 - 0.25} + \frac{0.9 + 0.4}{1 - 0.25} z^{-1} + \frac{-0.8 - 0.45}{1 - 0.25} z^{-2} + \frac{0.5 - 0.5}{1 - 0.25} z^{-3} = 1 + \frac{1.3}{0.75} z^{-1} - \frac{1.25}{0.75} z^{-2}$$

$$\Rightarrow A_2(z) = 1 + 1.73z^{-1} - 1.67z^{-2}$$

Probleme rezolvate

Prin urmare

$$K_2 = \alpha_2(2) = -1.67 \Rightarrow B_2(z) = -1.67 + 1.73z^{-1} + z^{-2}$$

Repetând decrementarea recursivă, pentru $m = 2$, obținem

$$\begin{aligned} A_1(z) &= \frac{A_2(z) - K_2 B_2(z)}{1 - K_2^2} = \frac{1 + 1.73z^{-1} - 1.67z^{-2} + 1.67(-1.67 + 1.73z^{-1} + z^{-2})}{1 - (-1.67)^2} \\ &= 1 + \frac{1.73(1 + 1.67)}{(1 - 1.67)(1 + 1.67)} z^{-1} = 1 - \frac{1.73}{0.67} z^{-1} \\ &\Rightarrow A_1(z) = 1 - 2.59z^{-1} \end{aligned}$$

Prin urmare

$$K_1 = \alpha_1(1) = -2.59 \Rightarrow B_1(z) = -2.59 + z^{-1}$$

Având trei coeficienți laticiali, implementarea laticială va conține trei stagii, ca în figura 4.24.

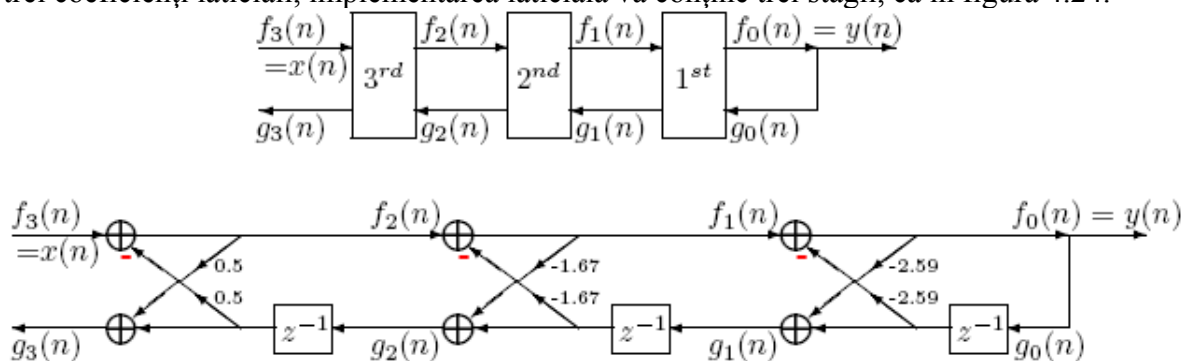


Figura 4.24. Implementarea laticială a sistemului IIR numai cu poli,

$$H(z) = \frac{1}{1 + 0.9z^{-1} - 0.8z^{-2} + 0.5z^{-3}}$$

Ieșirea sistemului va fi:

$$y(n) = -0.9y(n-1) + 0.8y(n-2) - 0.5y(n-3) + x(n)$$

Problema 20 – Filtru IIR cu poli și zerouri, structura laticială-scară: Acest exemplu urmărește implementarea unui sistem IIR cu poli și zerouri sub forma laticială-scară.

Se consideră sistemul descris de funcția de transfer:

$$H(z) = \frac{1 - 0.2z^{-1} + 0.15z^{-2}}{1 + 0.1z^{-1} - 0.72z^{-2}}$$

Se va evalua și ieșirea sistemului.

Funcția de sistem corespunzătoare filtrului IIR cu poli și zerouri este:

$$H(z) = \frac{C_M(z)}{A_N(z)} = \frac{C_2(z)}{A_2(z)}$$

Cu ajutorul polinomului $A_N(z)$ vom determina coeficienții laticiali K_i , $i = \overline{1, N}$, folosind relațiile de decrementare ca la **Problema 19**.

$$A_2(z) = 1 + 0.1z^{-1} - 0.72z^{-2}$$

Prin urmare

$$K_2 = \alpha_2(2) = -0.72 \Rightarrow B_2(z) = -0.72 + 0.1z^{-1} + z^{-2}$$

Repetând decrementarea recursivă, pentru $m = 2$, obținem

$$\begin{aligned} A_1(z) &= \frac{A_2(z) - K_2 B_2(z)}{1 - K_2^2} = \frac{1 + 0.1z^{-1} - 0.72z^{-2} + 0.72(-0.72 + 0.1z^{-1} + z^{-2})}{1 - (-0.72)^2} \\ &= 1 + \frac{0.1(1 + 0.72)}{(1 - 0.72)(1 + 0.72)} z^{-1} = 1 + \frac{0.1}{0.28} z^{-1} \end{aligned}$$

Probleme rezolvate

$$\Rightarrow A_1(z) = 1 + 0.36z^{-1}$$

$$\Rightarrow K_1 = \alpha_1(1) = 0.36 \Rightarrow B_1(z) = 0.36 + z^{-1}$$

Conform relației (4.43)

$$A_0(z) = B_0(z) = 1$$

Acum putem trece la evaluarea coeficienților scării v_m , $m = \overline{0, M}$.

$$C_2(z) = \sum_{m=0}^2 v_m B_m(z) \Leftrightarrow C_2(z) = v_0 B_0(z) + v_1 B_1(z) + v_2 B_2(z)$$

$$1 - 0.2z^{-1} + 0.15z^{-2} = v_0 \cdot 1 + v_1 \cdot \left(\frac{5}{14} + z^{-1}\right) + v_2 \cdot \left(-\frac{18}{25} + \frac{1}{10}z^{-1} + z^{-2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = v_0 + 0.36v_1 - 0.72v_2 \\ -0.2 = v_1 + 0.1v_2 \\ 0.15 = v_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_2 = 0.15 \\ v_1 = -0.2 - 0.1 \cdot 0.15 \\ v_0 = 1 - 0.36(-0.2 - 0.1 \cdot 0.15) + 0.72 \cdot 0.15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_2 = 0.15 \\ v_1 = -0.215 \\ v_0 = 1.185 \end{cases}$$

Implementarea laticială-scară corespunzătoare sistemului IIR este ilustrată în figura 4.25.

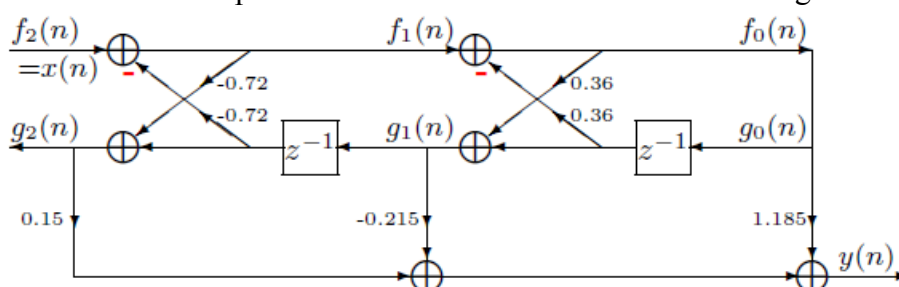


Figura 4.25. Implementarea laticială-scară, $H(z) = \frac{1 - 0.2z^{-1} + 0.15z^{-2}}{1 + 0.1z^{-1} - 0.72z^{-2}}$

Ieșirea sistemului IIR cu poli și zerouri este:

$$y(n) = -0.1y(n-1) + 0.72y(n-2) + x(n) - 0.2x(n-1) + 0.15x(n-2)$$