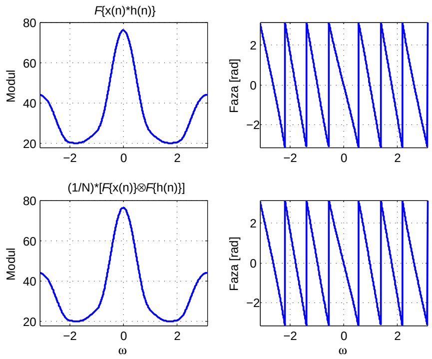

Figura 6.6: Transformata Fourier a secvenţei produs şi convoluţia circulară a transformatelor Fourier individuale

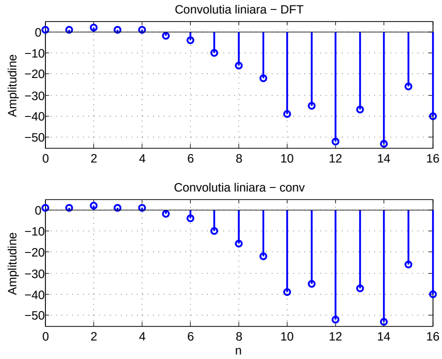

Figura 6.7: Convoluţia liniară evaluată direct şi cu ajutorul DFT-ului

5. **Convoluţia liniară evaluată cu ajutorul convoluţiei circulare**. Se poate evalua convoluţia liniară a două secvenţe $x(n)$ şi $h(n)$, de lungimi N şi, respectiv, M, cu ajutorul convoluţiei circulare, adăugându-se zerouri la secvenţele iniţiale, astfel încât noile secvenţe să aibă lungimea $L = N + M - 1$ (lungimea convoluţiei liniare dintre secvenţele iniţiale). Secvenţele considerate pentru aplicaţia MATLAB `Ex6_5.m` sunt secvenţa de intrare:

$$x(n) \;=\; \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\},$$

şi secvenţa răspuns la impuls:

$$h(n) \;=\; \{\underset{\uparrow}{1}, -1, 1, -2, 1, -3, 1, -4\}.$$

În figura 6.7 sunt ilustrate grafic rezultatul obţinut în urma evaluării convoluţiei liniare, precum şi rezultatul obţinut în urma evaluării convoluţiei circulare, pentru secvenţele date.

```
% Ex6_4 - convolutia liniara evaluata cu ajutorul convolutiei circulare
x = [1 2 3 4 5 6 7 8 9 10]; h = [1 -1 1 -2 1 -3 1 -4];
N = length(x); M = length(h); n = 0:N+M-2;
xe = [x zeros(1, M-1)]; he = [h zeros(1, N-1)];
X = fft(xe); H = fft(he); Y = X.*H;
y_lin = conv(x, h); y_dft = real(ifft(Y));
subplot(211); stem(n,y_dft); title('Convolutia liniara -DFT');
subplot(212); stem(n,y_lin); xlabel('n');
ylabel('Amplitudine'); title('Convolutia liniara - conv');
```

6.4 Exerciţii

1. Să se evalueze convoluţia liniară dintre secvenţele:

$$x_1(n) = 1.5\cos\left(2\pi 0.1 n + \frac{\pi}{4}\right), \qquad x_2(n) = |10 - n|,\; n = \overline{0, 20}.$$

Să se reprezinte grafic cele două secvenţe şi rezultatul convoluţiei liniare. Care este lungimea rezultatului convoluţiei liniare?

2. Răspunsul la impuls al unui sistem LTI este:

$$h(n) = \begin{cases} \exp(-0.1n), & n = \overline{0, 31}, \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

La intrarea sistemului se aplică secvenţa $x(n) = u(n) - u(n-20)$. Să se determine ieşirea sistemului utilizând convoluţia liniară.

3. Răspunsul la impuls al unui sistem LTI este:

$$h(n) = \begin{cases} \exp(-0.15n), & n = \overline{0, 31}, \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

La intrarea sistemului se aplică secvenţa $x(n) = u(n) - u(n-30)$. Să se determine ieşirea sistemului utilizând convoluţia liniară.

4. Se consideră sistemul: $H(z) = \dfrac{z}{z - 0.5}$. Să se evalueze:
   - Răspunsul la treapta unitate;
   - Răspunsul la rampa unitate;
   - Răspunsul la secvenţa $x(n) = 10\cos\dfrac{\pi n}{3} \cdot u(n)$;
   - Răspunsul la secvenţa $x(n) = 10 \cdot 0.5^n \cdot u(n)$.

5. Se consideră sistemul descris prin funcţia de transfer:

$$H(z) = \frac{z-1}{(z-0.25)(z-0.5)}.$$

   - Să se determine primele 100 eşantioane ale secvenţei răspuns la treaptă unitate;
   - Să se exprime funcţia de sistem sub forma: $H(z) = H_1(z) + H_2(z)$; să se determine răspunsul la treaptă unitate pentru fiecare bloc în parte şi să se adune răspunsurile obţinute. Comparaţi rezultatul cu cel obţinut la punctul anterior.

6. Două sisteme liniare sunt conectate în cascadă:

$h_1(n) = \{ \underset{\uparrow}{2}, 3, 2, 1, -0.5, 1, 2, 4\}$ şi $h_2(n) = \{ \underset{\uparrow}{3}, -1, 5, 0, 2, 6\}$.

   - Să se genereze o intrare arbitrară $x(n)$ (de exemplu, o secvenţă sinusoidală); să se evalueze ieşirea primului sistem utilizând convoluţia liniară iar, apoi, ieşirea din cascada formată de cele două sisteme;
   - Să se modifice ordinea de cascadare şi să se repete punctul anterior. Ce se observă?

- Să presupunem că al doilea sistem este caracterizat prin relaţia de intrare-ieşire $y(n) = 0.01[x(n)]^2$ şi primul sistem rămâne nemodificat. Să se repete punctele anterioare şi să se compare secvenţele de ieşire obţinute. Ce se observă?

7. Să se evalueze convoluţia circulară dintre secvenţele:
$$x_1(n) = 1.1\cos\left(\pi 0.25n + \frac{\pi}{6}\right) \quad \text{şi} \quad x_2(n) = (-2)^n,\ n = \overline{0,10}.$$
Să se reprezinte grafic cele două secvenţe şi rezultatul convoluţiei circulare. Care este lungimea rezultatului convoluţiei circulare?

8. Se consideră secvenţele:
$$x_1(n) = 1.1\sin\left(2\pi 0.05n + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{şi} \quad x_2(n) = (-1)^n,\ n = \overline{0,15}.$$
Să se scrie o aplicaţie MATLAB pentru evaluarea:
- Convoluţiei liniare;
- Convoluţiei circulare în 16 puncte, în două moduri (utilizând `circonv` şi `fft`);
- Convoluţiei circulare în numărul minim de puncte necesar pentru a obţine acelaşi rezultat ca şi în cazul convoluţiei liniare, în două moduri (folosind `circonv` şi `fft`).

9. Să se evalueze convoluţia liniară şi convoluţia circulară (folosind DFT de lungime minimă) dintre secvenţele: $x_1(n) = u(n) - u(n-20),\ n = \overline{0,30}$ şi $x_2(n) = (-0.7)^n,\ n = \overline{0,20}$. Care este lungimea minimă N astfel încât valorile celor două convoluţii să fie identice? Să se reprezinte grafic cele două secvenţe şi secvenţele obţinute în urma evaluării convoluţiilor.

10. Se consideră secvenţele:
$$x_1(n) = \{\underset{\uparrow}{3}, 4.2, 11, 0, 7, -1, 0, 2\}, \qquad x_2(n) = \{\underset{\uparrow}{1.2}, 3, 0, -0.5, 2\},$$
- Să se evalueze convoluţia liniară (utilizând funcţia `conv`) dintre $x_1(n)$ şi $x_2(n)$. Care este lungimea rezultatului?
- În unele cazuri, este convenabilă evaluarea convoluţiei utilizând transformata Fourier. Pentru început, să se evalueze convoluţia liniară într-un mod oarecum deficitar. Să se adauge trei zerouri la $x_2(n)$, astfel încât ambele secvenţe să aibă aceeaşi lungime, iar apoi să se evalueze DFT-urile în 8 puncte. După multiplicarea celor două DFT-uri, să se evalueze IDFT-ul produsului $X_1(k)X_2(k)$. În ce măsură rezultatul obţinut se aseamănă cu rezultatul convoluţiei liniare? Câte eşantioane

sunt corecte? De ce?

- Care este numărul minim de puncte în care trebuie evaluat DFT-ul astfel încât, prin procedeul anterior, să se obţină exact rezultatul convoluţiei liniare? Să se adauge zerouri celor două secvenţe, până când acestea au lungimea minimă necesară pentru evaluarea corectă a convoluţiei liniare cu ajutorul DFT-ului. Să se repete punctul anterior.
- Să se adauge încă cinci zerouri secvenţelor obţinute la punctul precedent. Să se evalueze şi pentru aceste secvenţe convoluţia liniară cu ajutorul DFT-ului (folosind algoritmul descris anterior). Precizaţi în ce măsură un număr mai mare de eşantioane afectează rezultatul.

11. Se consideră secvenţa:

$$x(n) \;=\; \{\underset{\uparrow}{3},2,7,1,4\}.$$

- Să se evalueze DFT-ul în 5 puncte pentru $x(n)$ iar, apoi, să se multiplice DFT-ul cu exponenţiala complexă: $e^{-j\frac{2\pi k}{5}}$. Să se calculeze IDFT-ul produsului, adică secvenţa: $x_1(n) = \mathrm{IDFT}\{X(k)e^{-j\frac{2\pi k}{5}}\}$ (să se ia în calcul doar partea reală a secvenţei $x_1(n)$, partea imaginară fiind datorată erorilor de rotunjire). Să se compare secvenţele $x_1(n)$ şi $x(n)$. Sunt aceste secvenţe obţinute prin translaţie circulară?
- Să repete punctul anterior astfel încât să se obţină o translaţie circulară cu 3 eşantioane.
- Cum se poate modifica această metodă pentru a se evalua convoluţia liniară?