$$\Leftrightarrow \begin{cases} G = 1 - r^2 \\ \dfrac{\left(1-r^2\right)^2}{1+r^4} = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} G = 1 - r^2 \\ 4\left(1 - 2r^2 + r^4\right) = 1 + r^4 \end{cases}$$

$$3r^4 - 8r^2 + 3 = 0 \quad \overbrace{\Rightarrow}^{r^2=t} \quad t_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-36}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = \dfrac{4-\sqrt{7}}{3} = 0.45 \Rightarrow r_{1,2} = \pm 0.67 \\ t_2 = \dfrac{4+\sqrt{7}}{3} = 2.22 \Rightarrow r_{3,4} = \pm 1.49. \end{cases}$$

Valoarea lui r trebuie să fie pozitivă şi mai mică decât 1, ca atare alegem $r = 0.67$

$$\Rightarrow G = 1 - r^2 = 0.55 \qquad \Rightarrow H(z) = \frac{0.55}{1 + 0.45z^{-2}}.$$

Pentru a obţine secvenţa răspuns la impuls funcţia de sistem trebuie descompusă în fracţii simple:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{0.275}{1 + j0.67z^{-1}} + \frac{0.275}{1 - j0.67z^{-1}} \\ \Rightarrow h(n) &= [0.275(-j0.67)^n + 0.275(j0.67)^n]u(n) \\ &= 0.275(0.67)^n\left(e^{-j\frac{\pi n}{2}} + e^{j\frac{\pi n}{2}}\right)u(n) \\ &= 0.55 \cdot 0.67^n \cdot \cos\frac{\pi n}{2} \cdot u(n). \end{aligned}$$

8.4 Exerciţii

1. Pentru filtrele proiectate la exerciţiul 1 să se reprezinte caracteristicile răspunsului la frecvenţă (faza şi timpul de întârziere de grup). Explicaţi simetria caracteristicilor TJ versus TS. Pentru fiecare filtru în parte să se scrie funcţia de transfer, astfel încât valoarea maximă a modulului funcţiei răspuns la frecvenţă să fie 1 (0 dB).

2. Să se reprezinte modulul şi faza răspunsului la frecvenţă pentru două filtre digitale de rejecţie cu nul la $\omega = \dfrac{\pi}{3}$ şi poli în vecinătatea nulului, pentru $r = 0.6$ şi, respectiv, $r = 0.96$.

3. Să se proiecteze un FTJ IIR, de ordin unu, cu frecvenţa de tăiere $\omega_c = 0.3\pi$ şi câştig unitar în banda de trecere. Să se reprezinte caracteristicile răspunsului la frecvenţă (modulul, faza şi timpul de întârziere de grup).

4. Se consideră un filtru FIR descris prin relaţia de intrare-ieşire:
$$y(n) = \frac{1}{4}\left[x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3)\right].$$
Să se reprezinte răspunsul la impuls şi caracteristicile răspunsului la frecvenţă.

5. Un sistem LTI este descris prin funcţia de sistem: $H(z) = \dfrac{z}{z-0.9}$.
   - Să se evalueze şi să se reprezinte grafic răspunsul la impuls;
   - Să se evalueze şi să se reprezinte grafic caracteristicile răspunsului la frecvenţă;
   - Să se evalueze ieşirea filtrului la excitaţia $x(n) = \sin(2\pi 0.05n)$, pentru $n = \overline{0, 499}$. Să se compare secvenţa de intrare cu cea obţinută la ieşire. Cum este afectată amplitudinea şi faza sinusoidei de la intrare?
   - Să se repete punctul anterior pentru $x(n) = \sin(2\pi 0.1n)$, $n = \overline{0, 499}$.

6. Se consideră două semnale continue în timp $x_a(t)$ şi $y_a(t)$, care se află într-o relaţie integrală: $y_a(t) = \int_0^t x_a(t)dt$. Integrala poate fi aproximată cu regula trapezului:
$$y_a(t) \simeq y_a(t_0) + \frac{t - t_0}{2}[x_a(t) + x_a(t_0)].$$
Un integrator discret poate fi descris prin ecuaţia cu diferenţe finite:
$$y(n) = y(n-1) + \frac{T}{2}[x(n) + x(n-1)],$$
unde $x(n)$ şi $y(n)$ reprezintă versiunile eşantionate ale semnalelor $x_a(t)$ şi $y_a(t)$.
   - Să se determine funcţia de transfer $H(z)$ corespunzătoare interatorului discret;
   - Să se genereze doi vectori care să descrie integratorul discret. Se consideră $T = 0.1$ s;
   - Se consideră semnalul: $x_a(t) = 0.9^t \sin(2t)$. Integrala acestuia poate fi aproximată cu ajutorul integratorului discret. În acest scop semnalul este eşantionat cu $T = 0.1$ s şi apoi trecut prin integrator. Să se evalueze primele 100 eşantioane ale secvenţei de ieşire;
   - Să se repete punctele anterioare pentru $T = 0.05$ s.

7. Se consideră sistemul LTI descris prin funcţia de sistem: $H(z) = \dfrac{1}{1 - z^{-N}}$.
   - Să se creeze o variabilă care să descrie acest sistem iar, apoi, să se gene-

reze 100 eşantioane corespunzătoare răspunsului la impuls al sistemului ($N = 10$);

- Să se evalueze şi să se reprezinte grafic caracteristicile răspunsului la frecvenţă;
- Să se genereze secvenţa $x(n) = 9 - n$, pentru $n = \overline{0, 9}$. Să se dauge secvenţei $x(n)$ 90 de zerouri şi apoi să se treacă noua secvenţă prin filtru. Să se evalueze primele 100 eşantioane ale secvenţei de ieşire.