Tehnici de procesare a semnalelor audio
Metode de estimare spectrală

CORNELIU RUSU

Corneliu.Rusu@bel.utcluj.ro

Tehnici de estimare spectrală

- Metode de estimare spectrală
- Tehnici neparametrice
- Tehnici parametrice

Metode de estimare spectrală

- In practică noi suntem mai mult interesați de probleme de estimare spectrală care constau în estimarea spectrului de putere a unui proces stochastic printr-un număr finit de măsurători dintr-o singură realizare a procesului.

- Numărul finit de măsurători este o limitare majoră pentru calitatea estimării spectrale.

- Pentru semnale staționare, un număr mai mare de măsurători dau un estimator mai bun.

- Pentru semnale nestaționare, nu putem selecta un număr mare și arbitrar de măsurători pentru estimarea spectrului.

- Pentru semnale nestaționare lungimea segmentului de date este dat de viteza variației în timp a statisticilor semnalului.

- In general se preferă un număr de măsurători cât mai mic, dar care să permită aflarea caracteristicilor spectrale.

- Există două tipuri de estimări spectrale clasice: metode parametrice și tehnici neparametrice. Există tehnici prin evaluarea valorilor proprii.

- Tehnicile neparametrice nu fac nici o presupunere despre modelul procesului și în locul modelului accentul se pune pe măsurătoare. Aceste tehnici se comportă de obicei mai slab decât cele parametrice.

- Tehnicile parametrice presupun existența unui model (MA, AR sau ARMA) pentru procesul respectiv și estimarea spectrală constă în obținerea parametrilor de model.

Tehnici neparametrice

- Există două tipuri clasice de analiză spectrală:
  1. Directă:
  $$x(n) \Rightarrow X(f) \Rightarrow |X(f)|^2$$
  2. Indirectă:
  $$x(n) \Rightarrow r_{xx}(n) \Rightarrow |X(f)|^2$$
- Număr finit de măsurători $x(n)$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$
- Ferestruirea $\hat{x}(n) = x(n)w(n)$;
- Dispersia spectrului (**Leakage**);

- Discretizarea spectrului

$$P_{xx}(\omega) = \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega n} \right|^2 ; P_{xx}(k) = \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-\frac{j2\pi kn}{N}} \right|^2$$

$$P_{xx}(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} r_{xx}(n) e^{-j\omega n}; \quad P_{xx}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} r_{xx}(n) e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}$$

Periodograma

- Media în timp a autocorelației ($\tilde{r}_{xx}(m) = \tilde{r}_{xx}(-m)$) ne poate da $P_{xx}(\omega)$

$$\tilde{r}_{xx}(m) = \frac{1}{N - |m|} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n)x(n+m)$$

$$E\left[\tilde{r}_{xx}(m)\right] = \frac{1}{N - |m|} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} E[x(n)x(n+m)] = r_{xx}(m)$$

- $\tilde{r}_{xx}(m)$ estimator nedeplasat al $r_{xx}(m)$

- Dacă $\sum_{m\in\mathbb{Z}} |r_{xx}(m)|^2 < \infty$, atunci $\lim_{N\to\infty} \mathrm{var}[\tilde{r}_{xx}(m)] = 0$
  $\tilde{r}_{xx}(m)$ estimator consistent al $r_{xx}(m)$

- $m \nearrow N$, $N \gg 1$, date puține, estimatorul $\tilde{r}_{xx}(m)$ are varianță mare

- Se introduce estimatorul deplasat cu $|m| r_{xx}(m)/N$, cu varianță mai mică

$$\hat{r}_{xx}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n)x(n+m); \quad E[\hat{r}_{xx}(m)] = \frac{N-|m|}{N} r_{xx}(m)$$

- $\hat{r}_{xx}(m)$ - asimptotic nedeplasat: $\lim_{N\to\infty} E[\hat{r}_{xx}(m)] = r_{xx}(m)$; varianța sa $\searrow 0$ când $N \to \infty \Rightarrow \hat{r}_{xx}(m)$ estimator consistent al $r_{xx}(m)$

- $\hat{r}_{xx}(m)$ este utilizat în analiza spectrală

$$\hat{P}_{xx}(\omega) = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \hat{r}_{xx}(m) e^{-j\omega n} =$$

$$\sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n)x(n+m) \right] e^{-j\omega n} = \cdots =$$

$$= \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega n} \right|^2$$

- $\hat{P}_{xx}(\omega) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega n} \right|^2$ = Periodograma (Schuster)

- Media periodogramei

$$E[\hat{P}_{xx}(\omega)] = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \overbrace{\left(1 - \frac{|m|}{N}\right)}^{w_B(m)} r_{xx}(m) e^{-j\omega m} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{xx}(\lambda) W_B(\omega - \lambda) d\lambda$$

- Spectrul astfel estimat este un estimator asimptotic nedeplasat

$$\lim_{N \to \infty} E\left[\sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \hat{r}_{xx}(m) e^{-j\omega n}\right] = P_{xx}(\omega)$$

- Varianța nu descrește spre zero când $N \to \infty$ = estimator inconsistent

$$\mathrm{var}[\hat{P}_{xx}(\omega)] = P_{xx}^2(\omega)\left[1 + \left(\frac{\sin \omega N}{N \sin \omega}\right)^2\right];$$

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{var}[\hat{P}_{xx}(\omega)] = P_{xx}(\omega).$$

- Periodograma se poate calcula cu DFT. Dacă $x(n)$ are lungime N

$$\hat{P}_{xx}(2\pi\frac{k}{N}) = \frac{1}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi\frac{k}{N}n}\right|^2, \; k = 0, 1, \ldots, N-1$$

- Periodograma se poate îmbunătăți prin adăugarea de zerouri

$$\hat{P}_{xx}(2\pi\frac{k}{L}) = \frac{1}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi\frac{k}{L}n}\right|^2, \; k = 0, 1, \ldots, L-1$$

Medierea periodogramei - Bartlett

- Divizăm secvența de lungime N în K blocuri de lungime M; $N = KM$

- Secvența de intrare devine $x_i(n) = x(n+iM)$; $i = 0, 1, \ldots, K-1$=bloc, $n = 0, 1, \ldots, M-1$=index in bloc

- Pentru fiecare bloc de lungime M vom calcula periodograma

$$\hat{P}_{xx}^{(i)}(\omega) = \frac{1}{M}\left|\sum_{n=0}^{M-1} x(n)e^{-j\omega n}\right|^2, \quad i = 0, 1, \ldots, K-1$$

- Facem media celor K periodograme $\Rightarrow$ Estimarea spectrală Bartlett

$$P_{xx}^{B}(\omega) = \frac{1}{K}\sum_{i=0}^{K-1}\hat{P}_{xx}^{(i)}(\omega)$$

- Media statistică a periodogramei Bartlett = media unei periodograme

$$E[P_{xx}^{B}(\omega)] = \frac{1}{K}E\left[\sum_{i=0}^{K-1}\hat{P}_{xx}^{(i)}(\omega)\right] = E[\hat{P}_{xx}^{(i)}(\omega)] =$$

$$\sum_{m=-(M-1)}^{M-1}\left(1-\frac{|m|}{M}\right)r_{xx}(m)e^{-j\omega m} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_{xx}(\lambda)W_B(\omega-\lambda)d\lambda$$

- Rezoluția în frecvență și varianța estimării spectrale se reduc de K ori

$$w_B(m) = \begin{cases} 1 - |m|/M, & |m| \leq M-1; \\ 0, & |m| > M-1; \end{cases}$$

$$W_B(\omega) = \frac{1}{M}\left(\frac{\sin(M\omega/2)}{\sin(\omega/2)}\right)^2$$

$$\mathrm{var}[P_{xx}^B(\omega)] = \frac{1}{K^2}\mathrm{var}\sum_{i=0}^{K-1}\left[\mathrm{var}\hat{P}_{xx}^{(i)}(\omega)\right] = \frac{1}{K}P_{xx}^2(\omega)\left[1 + \left(\frac{\sin M\omega}{M\sin\omega}\right)^2\right]$$

Medierea periodogramei modificate - Welch

- Se modifică metoda Bartlett permițând blocurilor să se suprapună, iar ferestruirea se aplică înainte de calculul periodogramei

- Blocurile de date sunt $x_i(n) = x(n + iD)$, $n = 0, 1, \ldots, M - 1$, $i = 0, 1, \ldots, L - 1$
  $iD =$ punctul de start al blocului i

- Dacă $D = M$, segmentele nu se suprapun; numărul L de blocuri de date este același cu numărul K din metode Bartlett

- Dacă $D = M/2$, avem 50% suprapunere între două blocuri de date succesive; se obțin $L = 2K$ blocuri de lungime M sau K blocuri de lungime $2M$

- U= factor de normalizare= puterea ferestrei $w(n)$ $\quad U = \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1} w^2(n)$

- Periodograma modificată

$$\tilde{P}_{xx}^{(i)}(\omega) = \frac{1}{MU}\left|\sum_{n=0}^{M-1} x(n)w(n)e^{-j\omega n}\right|^2, i = \overline{0, L-1}$$

- Estimatorul spectral Welch $P_{xx}^{W}(\omega) = \frac{1}{L}\sum_{i=0}^{L-1}\tilde{P}_{xx}^{(i)}(\omega)$ are media $E[P_{xx}^{W}(\omega)]$

$$E[P_{xx}^{W}(\omega)] = \frac{1}{L} E\left[\sum_{i=0}^{L-1} \tilde{P}_{xx}^{(i)}(\omega)\right] = E[\tilde{P}_{xx}^{(i)}(\omega)] =$$

$$\frac{1}{MU} \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{M-1} w(n)w(m)r_{xx}(n-m)e^{-j\omega(n-m)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{xx}(\lambda) W_W(\omega - \lambda) d$$

$$W_W(\omega) = \frac{1}{MU} \left| \sum_{n=0}^{M-1} w(n) e^{-j\omega n} \right|^2 ; \qquad \int_{-2\pi}^{2\pi} W_W(\omega) d\omega = 2\pi$$

- Varianța estimatorului Welch

$$\mathrm{var}[P_{xx}^{W}(\omega)] = \frac{1}{L^2} \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{L-1} E[\tilde{P}_{xx}^{(i)}(\omega) \tilde{P}_{xx}^{(j)}(\omega)] - \{E[P_{xx}^{W}(\omega)]\}^2$$

- Blocuri fără suprapuneri: $\mathrm{var}[P_{xx}^{W}(\omega)] \approx \frac{1}{L} P_{xx}^{2}(\omega)$
- Blocuri cu 50% suprapuneri: $\mathrm{var}[P_{xx}^{W}(\omega)] \approx \frac{9}{8L} P_{xx}^{2}(\omega)$
- Se pot utiliza și alte ferestre în loc de Bartlett
- Se modifică mai mult varianța
- Suprapunerile pot fi mai mari de 50%

Netezirea periodogramei - Blackman-Tukey

- Se aplică transformata Fourier asupra autocorelației anterior ferestruită
- Estimarea $\tilde{r}_{xx}(m)$ are varianță mare pentru $m \to N$
- Estimatorul Blackman-Tukey (fereastra $w(n)$, simetrică, lungime $2M-1$)

$$P_{xx}^{BT}(\omega) = \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} \tilde{r}_{xx}(m) w(m) e^{-j\omega n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{P}_{xx}(\lambda) W(\omega - \lambda) d\lambda$$

$\hat{P}_{xx}(\omega)$= periodograma;

- $W(\omega) \geq 0$ ($\Leftarrow P_{xx}^{BT}(\omega) \geq 0$); ferestrele Hamming, Hanning nu satisfac această condiție

- Lungimea ferestrei satisface $M \ll N$ pentru o netezire suplimentară a periodogramei

$$E[P_{xx}^{BT}(\omega)] = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{P}_{xx}(\theta) W_B(\lambda - \theta) W(\omega - \lambda) d\lambda d\theta$$

$$E[P_{xx}^{BT}(\omega)] \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{P}_{xx}(\theta) W(\omega - \theta) d\theta$$

$$\mathrm{var}[P_{xx}^{BT}(\omega)] = E\{[P_{xx}^{BT}(\omega)]^2\} - \{E[P_{xx}^{BT}(\omega)]\}^2 = \ldots$$

$$\approx \frac{1}{2\pi N} \int_{-\pi}^{\pi} P_{xx}^2(\lambda) W^2(\omega - \lambda) d\lambda \approx P_{xx}^2(\omega) \left[\frac{1}{N} \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} w^2(n) \right]$$

- S-a folosit că procesul aleator este gaussian

Comparație

Factor de calitate: T= P(Periodograma), B(Bartlett), W(Welch), BT (Blackman-Tukey)

$$Q_T = \frac{\{E[P_{xx}^T(\omega)]\}^2}{\mathrm{var}[P_{xx}^T(\omega)]}$$

- $Q_P = 1$; $Q_B = 1,11N\Delta f$; $Q_W = 1,39N\Delta f$ (suprapunere 50%, fereastră triunghiulară), $Q_{BT} = 2,34\Delta f$ (Δf= rezoluția în frecvență)
  Aparent metoda Welch - cea mai costisitoare, Bartlett - cea mai eficientă
  Diferențe mici între cele trei metode

Metoda	Bartlett	Welch	Blackman-Tukey
Lungime FFT	$\frac{0,9}{\Delta f}$	$\frac{1,28}{\Delta f}$	$\frac{1,28}{\Delta f}$
Număr FFT-uri	$1,11N\Delta f$	$1,56N\Delta f$	$1,56N\Delta f$
Complexitate de calcul	$N\log_2\frac{1,28}{\Delta f}$	$N\log_2\frac{5,12}{\Delta f}$	$N\log_2\frac{1,28}{\Delta f}$

Tehnici parametrice

- O importantă clasă de procese stochastice pot fi reprezentate printr-un model de tip funcție rațională.

- Un proces stochastic poate fi generat dintr-un semnal zgomot alb aplicat la intrarea unui sistem descris printr-o funcție de transfer rațională.

- Aceste procese apar des în practică și modelul funcțiilor raționale este utilizat ca și reprezentare aproximativă pentru aplicații.

- Problema cheie este care dintre cele trei modele (MA, AR sau ARMA) este mai bun pentru o situație dată.

- În general intrarea și ieșirea sunt legate prin

$$x(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k x(n-k) + \sum_{n=0}^{M} b_k u(n-k)$$

$u(n)$ este secvența zgomot alb de medie zero și putere σ_u^2.

- Acesta este un model autoregresiv și cu medie alunecătoare (ARMA - Autoregressive and Moving Average).

- Parametrii autoregresivi a_k; parametrii de medie alunecătoare b_k

- Ne vom referi la un proces ARMA(M,N). Funcția de sistem

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}}$$

- Rădăcinile lui $A(z)$ sunt în interiorul cercului unitate; $H(z)$ este stabil și cauzal

- Această presupunere ne asigură că secvența de ieșire $x(n)$ este WSS

- Teorema Wiener-Hincin $P_{xx}(z) = H(z)H(z^{-1})P_{uu}(z)$; $P_{uu}(z) = \sigma_u^2$.

$$P_{xx}(z) = \sigma_u^2 \frac{B(z)B(z^{-1})}{A(z)A(z^{-1})}; \quad P_{xx}(\omega) = \sigma_u^2 \frac{|B(\omega)|^2}{|A(\omega)|^2}$$

- Presupunem că ambele polinoame (numitor și numărător) au coeficientul dominant 1, un câștig arbitrar poate fi absorbit în puterea de zgomot σ_u^2

- Sistemul $H(z)$ care este utilizat la generarea procesului ARMA se numește filtru de sinteză

- Semnalul zgomot alb de intrare poate fi recuperat dintr-un proces ARMA $\{x(n)\}$ dacă acesta se aplică la intrarea unui filtru $H^{-1}(z)$

- Filtrul invers $H^{-1}(z)$ se numește filtru ARMA de analiză

- Dacă se renunță la partea autoregresivă a filtrului ($a_0 = 1$, $a_i = 0$, $i = \overline{1, N}$) se obține modelul de medie alunecătoare MA(M):

$$x(n) = u(n) + \sum_{k=1}^{M} b_k u(n-k)$$

- Funcția de sistem care generează procesul MA(M) este

$$H(z) = B(z) = 1 + \sum_{k=1}^{M} b_k z^{-k}$$

- Densitatea spectrală de putere $P_{xx}(z) = \sigma_u^2 B(z)B(z^{-1})$
- Spectrul de putere este dat de $P_{xx}(\omega) = \sigma_u^2 |B(\omega)|^2$
- $B(z) =$ filtru de sinteză al procesului MA; filtru numai cu zerouri
- Zgomotul alb de intrare poate fi recuperat din seria de timp $\{x(n)\}$ dacă acesta se aplică la intrarea unui filtru $B^{-1}(z)$. $B^{-1}(z) =$ filtru de analiză
- Dacă renunțăm la partea de medie alunecătoare a modelului ARMA (înseamnă că toți coeficenții b_i sunt zero exceptând $b_0 = 1$), atunci obținem cu un proces autoregresiv AR(N):

$$x(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k x(n-k) + u(n)$$

- Funcția de sistem care generează procesul AR(N):

$$H(z) = \frac{1}{A(z)} = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_N z^{-N}}$$

- Densitatea spectrală de putere

$$P_{xx}(z) = \frac{\sigma_u^2}{A(z)A(z^{-1})}$$

- Spectrul de putere este dat de

$$P_{xx}(\omega) = \frac{\sigma_u^2}{|A(\omega)|^2}$$

- $A(z)$ = filtru de sinteză al unui proces AR = filtru numai cu poli

- Semnalul de intrare poate fi recuperat din seria de timp $\{x(n)\}$ dacă acesta se aplică la intrarea unui filtru $A^{-1}(z)$. $A^{-1}(z)$ = filtru de analiză

- Putem face câteva observații calitative relativ la spectrul de putere al semnalelor ARMA, AR si MA.

- Deoarece modelul MA este produs de un filtru numai cu zerouri, spectrul MA este capabil să realizeze rejectii în frecvență când zerourile sunt lângă cercul unitate

- Similar, modelele AR pot obține vârfuri ascuțite la frecvențe corespunzând polilor de lângă cercul unitate

- Modelul ARMA poate avea rejecții și vârfuri ascuțite.

- Amintim că atât teorema de descompunere a lui Wold, cât și teorema Kolmogorov-Szego dau relații importante între diferite modele de funcții de transfer raționale.

- Astfel teorema de descompunere a lui Wold afirmă că un proces AR sau ARMA poate fi reprezentat printr-un model MA de ordin posibil infinit.

- Teorema Kolmogorov-Szego sugerează că un proces MA sau ARMA poate fi reprezentat de un model AR de ordin posibil infinit.

- Aceste rezultate sunt importante deoarece ne permit să obținem o aproximare (bună) chiar dacă am ales un model greșit.

- Astfel dacă încercăm să modelăm un proces ARMA(M,N) cu un model AR, rezultatele pot fi acceptabile dacă un ordin suficient de mare este ales pentru modelul AR.

- Pentru a arăta relațiile dintre coeficienții unui proces ARMA(M,N) și al unui AR(∞), fie $G(z)$ numărătorul polinomului de la modelul AR(∞)

$$\frac{1}{G(z)} = \frac{B(z)}{A(z)} \Rightarrow G(z)B(z) = A(z)$$

- Din inversa transformatei în z rezultă

$$\sum_{k=0}^{M} g(n-k)b_k = a_n$$

- Dar $b_k = 0$ pentru $n < 0$ și pentru $n > M$, prin urmare

$$g(n) = -\sum_{k=1}^{M} g(n-k)b_k + a_n$$

- Deoarece $a_n = 0$ pentru $n > N$, vom avea relațiile

$$g(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ -\sum_{k=1}^{M} g(n-k)b_k + a_n, & 1 \leq n \leq N \\ -\sum_{k=1}^{M} g(n-k)b_k, & n > N \end{cases}$$

Recurența este inițializată cu $g(-1) = g(-2) = \ldots = g(-M) = 0$.

- Să trecem acum la problema inversă și să presupunem că avem disponibili parametrii unui AR(∞) și dorim să calculăm un model echivalent ARMA(M,N). Această chestiune nu este o problemă trivială fiind de fapt o problemă clasică în teoria matematică a sistemelor, cunoscută sub numele de problema de realizabilitate.

- Dacă totuși cunoaștem *a priori* M și N, problema se simplifică substanțial.

  Din relațiile anterioare avem pentru $n > N$: $$g(n) = -\sum_{k=1}^{M} b_k g(n-k)$$

- Înlocuim cu $n = N+1, N+2, \ldots, N+M$; rezultă M ecuații care pot fi rezolvate pentru obținerea necunoscutelor b_k ale procesului MA.

- Sub formă matricială, putem obține b_k din

$$\begin{bmatrix} g(N) & g(N-1) & \cdots & g(N-M+1) \\ g(N+1) & g(N) & \cdots & g(N-M+2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g(N+M-1) & g(N+M-2) & \cdots & g(N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_M \end{bmatrix} =$$
$$-\left[g(N+1) \quad g(N+2) \quad \ldots \quad g(N+M)\right]^T$$

- De asemenea, din relațiile anterioare avem pentru $n = 1, 2, \ldots, N$

$$g(n) = -\sum_{k=1}^{M} b_k g(n-k) + a_n, \quad n = 1, 2, \ldots, N$$

$$a_n = g(n) + \sum_{k=1}^{M} b_k g(n-k), \quad n = 1, 2, \ldots, N$$

- Sub formă matricială, putem obține a_k astfel

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(1) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ g(2) & g(1) & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g(N) & g(N-1) & g(N-2) & \cdots & g(N-M) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_M \end{bmatrix}$$

- Doar primii $M+N$ coeficienți ai lui $G(z)$ care caracterizează AR(∞) sunt necesari pentru calculul $A(z)$ și $B(z)$

- Dacă $G(z)$ nu provine dintr-un model ARMA(M, N), atunci $G(z)$ și $A(z)/B(z)$ vor coincide doar pentru primii $M+N$ termeni

- Inversând rolurile lui $A(z)$ și $B(z)$, găsim legătura dintre parametrii unui sistem MA(∞) cu funcția de sistem $L(z)$ și un model ARMA(M, N)

$$l(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ -\sum_{k=1}^{N} l(n-k)a_k + b_n, & 1 \leq n \leq M \\ -\sum_{k=1}^{N} l(n-k)a_k, & n > M \end{cases}$$

Legătura dintre model și autocorelație

- Obținem relații dintre secvența de autocorelație și parametrii modelelor

- Pentru un model ARMA

$$P_{xx}(z) = \sigma_u^2 \frac{B(z)B(z^{-1})}{A(z)A(z^{-1})} \quad \Rightarrow$$

$$P_{xx}(z)A(z) = \sigma_u^2 \frac{B(z)B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \sigma_u^2 B(z)H(z^{-1})$$

$$P_{xx}(z) = \mathcal{F}\{r_{xx}(n)\}; \quad H(z^{-1}) = \mathcal{F}\{h(-n)\}$$

- Din inversa transformatei în z rezultă

$$\sum_{k=0}^{N} a_k r_{xx}(n-k) = \sigma_u^2 \sum_{k=0}^{M} b_k h(k-n)$$

- Deoarece $a_0 = 1$

$$r_{xx}(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k r_{xx}(n-k) + \sigma_u^2 \sum_{k=0}^{M} b_k h(k-n)$$

$$\sum_{k=0}^{M} b_k h(k-n) = b_0 h(-n) + b_1 h(1-n) + \cdots b_M h(M-k)$$

- $H(z)$ presupus cauzal $\Rightarrow$ a doua sumă nu are nici o contribuție la $r_{xx}(n)$ pentru $n > M$. Prin urmare

$$\sum_{k=0}^{M} b_k h(k-n) = \sum_{k=0}^{M-n} h(k) b_{n+k}$$

$$r_{xx}(n) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^{N} a_k r_{xx}(n-k) + \sigma_u^2 \sum_{k=0}^{M-n} h(k) b_{n+k}, & n = 0, 1, \ldots, M \\ -\sum_{k=1}^{N} a_k r_{xx}(n-k), & n \geq M+1 \end{cases}$$

- Parametrii autoregresivi ai modelului ARMA rezultă din

$$r_{xx}(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k r_{xx}(n-k), \quad n \geq M+1$$

- Avem N ecuații cu N necunoscute ($n = M+1, M = 2, \ldots, M+N$).

- Matricial (ecuaţia Yule-Walker extinsă pentru procesul ARMA):

$$\begin{bmatrix} r_{xx}(M) & r_{xx}(M-1) & \cdots & r_{xx}(M-N+1) \\ r_{xx}(M+1) & r_{xx}(M) & \cdots & r_{xx}(M-N+2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{xx}(M+N-1) & r_{xx}(M+N-2) & \cdots & r_{xx}(M) \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_{xx}(M+1) \\ r_{xx}(M+2) \\ \vdots \\ r_{xx}(M+N) \end{bmatrix}$$

- Ecuaţia Yule-Walker ne permite să calculăm parametrii autoregresivi din secvenţa de autocorelaţie.

- Relaţia pentru parametrii MA este mai dificilă; avem convoluţie între parametrii MA şi secvenţa pondere ARMA.

- Proces AR: relația autocorelație și parametrii AR $\Leftarrow$ ARMA cu $b_k = \delta(k)$

$$r_{xx}(n) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^{N} a_k r_{xx}(n-k) + \sigma_u^2 \sum_{k=0}^{M-n} h(k)\delta(n+k), & n = 0, 1, \ldots, M \\ -\sum_{k=1}^{N} a_k r_{xx}(n-k), & n \geq M+1 \end{cases}$$

- Dar $h(k)\delta(n+k) = h(-n)$ și $h(-n) = 0$ pentru $n > 0$.

$$r_{xx}(n) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^{N} a_k r_{xx}(n-k) + \sigma_u^2, & k = 0 \\ -\sum_{k=1}^{N} a_k r_{xx}(n-k), & k \geq 1 \end{cases}$$

- $r_{xx}(n) = r_{xx}(-n)$ pentru orice proces stochastic real.

- Matricial (Ecuația Yule-Walker pentru procese AR)

$$\begin{bmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(1) & \cdots & r_{xx}(M-1) \\ r_{xx}(1) & r_{xx}(0) & \cdots & r_{xx}(M-2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{xx}(N-1) & r_{xx}(N-2) & \cdots & r_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_{xx}(1) \\ r_{xx}(2) \\ \vdots \\ r_{xx}(N) \end{bmatrix}$$

- Matricea care conține elementele autocorelației este Toeplitz și simetrică

- Există un algorithm eficient de inversare a acestei matrici: Levinson-Durbin $O(p^2)$ operații

- Primele $N+1$ elemente ale secvenței de autocorelație determină în mod complet spectrul de putere al procesului AR.

- Odată ce coeficienții a_k sunt calculați din $r_{xx}(0)$, $r_{xx}(1)$, . . . , $r_{xx}(N)$, atunci $r_{xx}(n)$ poate fi calculată pentru $|n| > N$ cu

$$r_{xx}(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k r_{xx}(n-k) \Rightarrow P_{xx}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_{xx}(n) e^{-jn\omega}$$

- Din $r_{xx}(0) = -\sum_{k=1}^{N} a_k r_{xx}(-k) + \sigma_u^2$, se poate calcula puterea semnalului de intrare zgomot alb prin

$$\sigma_u^2 = \sum_{k=0}^{N} a_k r_{xx}(-k)$$

unde $a_0 = 1$.