cu ajutorul mapării (9.5) se obţine filtrul digital. În acest fel paramaterul T dispare din expresia lui $H(z)$, putând avea orice valoare arbitrară (de exemplu $T = 1$ s). Următoarea problemă ilustrează acest aspect.

6. **Proiectarea unui FTJ digital prin metoda transformării biliniare**. Se doreşte proiectarea unui FTJ IIR cu un singur pol şi cu frecvenţa de tăiere 0.3π, prin transformarea biliniară, pornind de la un FTJ analogic cu funcţia de sistem:

$$H_a(s) = \frac{\Omega_p}{s + \Omega_p},$$

unde Ω_p este frecvenţa de tăiere a filtrului analogic.

În domeniul analogic, frecvenţa $\omega_p = 0.3\pi$ corespunde la:

$$\Omega_p = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega_p}{2} = \frac{2}{T}\tan\frac{0.3\pi}{2} = \frac{1.02}{T}.$$

Ca atare, funcţia de sistem a filtrului analogic este:

$$H_a(s) = \frac{\frac{1.02}{T}}{s + \frac{1.02}{T}}.$$

Aplicând transformarea biliniară se obţine:

$$H(z) = \frac{\frac{1.02}{T}}{\frac{2}{T}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} + \frac{1.02}{T}} = \frac{1.02(1 + z^{-1})}{3.02 - 0.98z^{-1}} = \frac{0.3377(1 + z^{-1})}{1 - 0.3245z^{-1}}.$$

Răspunsul la frecvenţă al filtrului digital este:

$$H(\omega) = \frac{0.3377(1 + e^{-j\omega})}{1 - 0.3245e^{-j\omega}}.$$

La $\omega = 0$: $H(0) = 1$ şi la $\omega = 0.3\pi$: $|H(0.3\pi)| = 0.707$, exact răspunsul dorit.

9.4 Exerciţii

1. Utilizând metoda invarianţei răspunsului la impuls să se proiecteze un FTB digital Butterworth, pentru care:
   - Atenuarea este mai mică de 1 dB la 4 kHz şi la 6 kHz;
   - Atenuarea este mai mare de 40 dB la 3 kHz şi la 8 kHz;
   - Frecvenţa de eşantionare este 20 kHz.

   (a) Să se evalueze şi să se reprezinte grafic caracteristicile în domeniul frecvenţă pentru FTB analogic şi pentru cel digital;

(b) Să se evalueze şi să se reprezinte grafic răspunsul la impuls şi diagrama poli-zerouri pentru FTB digital;

(c) Este stabil filtrul digital obţinut?

Să se repete proiectarea utilizând metoda transformării biliniare.

2. Să se repete exerciţiul 1 pentru un filtru Cebyshev de tip I. Comentaţi diferenţele faţă de cazul anterior.

3. Să se repete exerciţiul 1 pentru un filtru Cebyshev de tip II. Comentaţi diferenţele faţă de cazurile anterioare.

4. Să se repete exerciţiul 1 pentru un filtru eliptic. Comentaţi diferenţele faţă de cazurile anterioare.

5. Se consideră filtrul analogic descris prin funcţia de sistem:
$$H(s) = \frac{2}{s+2}\frac{s^2+2}{2s^2+3s+2}.$$
Utilizând transformarea biliniară să se obţină filtrul digital corespunzător ($T = 0.8$ s). Ce tip de filtru se obţine? Este acest filtru stabil?

6. Să se proiecteze un FTJ Butterworth de ordin 5, care satisface condiţiile: $0.9 < H(\omega) < 1$, pentru $0 < f < 0.2$.

7. Să se proiecte un FTJ Butterworth de ordin minim, care satisface condiţiile: $0.99 < |H(f)| < 1$, $0 < f < 0.22$, şi $0 < |H(f)| < 0.01$, $0.25 < f < 0.5$.
   - Să se reprezinte grafic caracteristicile răspunsului la frecvenţă (modul, fază şi timp de întârziere de grup);
   - Să se evalueze polii şi zerourile sistemului şi să se scrie funcţia de sistem într-o manieră compactă.

8. Să se repete exerciţiul anterior pentru un filtru Cebyshev.

9. Să se proiecteze un FOB Cebyshev care rejectează frecvenţa $f = 0.22$. Proiectarea trebuie să satisfacă următoarele cerinţe:
   - Ordinul filtrului: 10;
   - Benda de oprire: 0.04;
   - Benzile de tranziţie: 0.03;
   - Atenuarea în banda de oprire: cel puţin 20 dB;
   - Riplul în banda de trecere: 1 dB.

   Să se evalueze ieşirea filtrului la excitaţia $x(n) = \sin(2\pi 0.22n)$, pentru $n = \overline{0, 299}$. Comentaţi rezultatele.