Lăcrimioara GRAMA, Corneliu RUSU. Prelucrarea numerică a semnalelor – aplicații și probleme. Ed. U.T.PRESS, Cluj-Napoca, 2008.

Capitolul 1 – Semnale și secvențe

Problema 1 – Generarea unei exponențiale complexe: Se dorește generarea și reprezentarea grafică a secvenței exponențiale complexe:

$$x(n) = 1.5\exp\left[\left(-\frac{1}{10} + j\frac{\pi}{5}\right)n\right], \qquad n = \overline{0,50}.$$

Rezolvare

Secvența fiind una complexă, vom putea afișa partea reală a acesteia, respectiv partea imaginară.

$$x(n) = 1.5\exp\left[\left(-\frac{1}{10} + j\frac{\pi}{5}\right)n\right] = 1.5\exp\left(-\frac{1}{10}n\right)\cos\frac{\pi n}{5} + j1.5\exp\left(-\frac{1}{10}n\right)\sin\frac{\pi n}{5}$$

Partea reală a secvenței $x(n)$ este: $\Rightarrow \mathrm{Re}\{x(n)\} = 1.5\exp\left(-\frac{1}{10}n\right)\cos\frac{\pi n}{5}$,

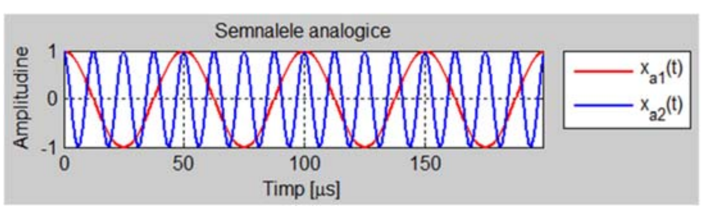
respectiv partea imaginară: $\Rightarrow \mathrm{Im}\{x(n)\} = 1.5\exp\left(-\frac{1}{10}n\right)\sin\frac{\pi n}{5}$.

Problema 2 – Eroarea de alias determinată de eșantionare: Se consideră două semnale analogice $x_{a1}(t)$ și $x_{a2}(t)$ cu amplitudinile: $A_1 = A_2 = 1$, frecvențele: $F_1 = 500$ Hz, $F_2 = 2$ kHz și fazele: $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, care se eșantioanează cu: $F_s = 2.5$ kHz. Se urmărește reprezentarea semnalelor analogice, a secvențelor discrete obținute după eșantionare și a semnalelor reconstituite din eșantioane.

Rezolvare

Semnalele analogice:

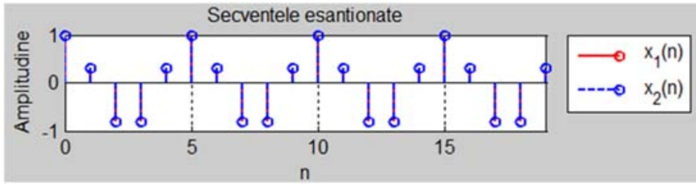
$$x_{a1}(t) = \cos(2\pi 500t); \qquad x_{a2}(t) = \cos\left(2\pi 2\cdot 10^3 t\right)$$



Secvențele obținute în urma eșantionării:

$$x_1(n) = \cos\left(2\pi\frac{500}{2.5\cdot 10^3}n\right) = \cos\left(2\pi\frac{1}{5}n\right);$$

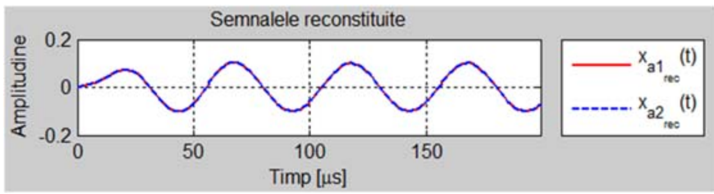
$$x_2(n) = \cos\left(2\pi\frac{2\cdot 10^3}{2.5\cdot 10^3}n\right) = \cos\left(2\pi\frac{2}{2.5}n - 2\pi n\right) = \cos\left(2\pi\frac{1}{5}n\right)$$



Semnalele reconstituite din eşantioane:

$$\tilde{x}_{a1}(t) = \cos\left(2\pi \frac{1}{5} 2.5 \cdot 10^3 t\right) = \cos(2\pi 500 t) \equiv x_{a1}(t);$$

$$\tilde{x}_{a2}(t) = \cos\left(2\pi \frac{1}{5} 2.5 \cdot 10^3 t\right) = \cos(2\pi 500 t) \neq x_{a2}(t)$$



Cel de-al doilea semnal analogic nu poate fi reconstituit, deoarece pentru acesta nu s-a respectat teorema eşantionării (alias).

Problema 3 – Eşantionare : Se consideră semnalul analogic: $x_a(t) = 2\cos(100\pi t)$. Se cere:

1. Determinaţi viteza minimă de eşantionare pentru evitarea oricărui alias.
2. Presupunând că semnalul este eşantionat cu rata $F_s = 200$ Hz, care este semnalul discret în timp obţinut după eşantionare?
3. Care este semnalul reconstituit din eşantioanele de la punctul 2?
4. Presupunînd că semnalul este eşantionat cu $F_s = 75$ Hz, care este semnalul discret în timp obţinut după eşantionare?
5. Care este frecvenţa $0 < F < F_2/2$ a unei sinusoide, care să producă eşantioane identice cu cele de la punctul 4?
6. Care este semnalul reconstituit din eşantioanele de la punctul 4?

Rezolvare

1. Viteza minimă de eşantionare pentru evitarea oricărui alias trebuie să fie dublul frecvenţei semnalului:

$$x_a(t) = 2\cos(2\pi 50 t) \Rightarrow F = 50 \text{ Hz} \Rightarrow F_{s\min} = 2F = 100 \text{ Hz}.$$

2. Secvenţa obţinută după eşantioanarea cu $F_s = 200$ Hz este:

$$x(n) = x_a\left(\frac{n}{F_s}\right) = 2\cos\left(2\pi \frac{50}{200} n\right) = 2\cos\frac{\pi n}{2} \Rightarrow f = \frac{1}{4} \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow \text{ perioada este } N = 4.$$

3. Semnalul reconstituit din eşantioanele de la punctul 2 este:

$$\tilde{x}_a(t) = x(tF_s) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2} 200 t\right) = 2\cos(100\pi t).$$

Semnalul reconstituit este este identic cu semnalul analogic iniţial, deoarece a fost respectată teorema eşantionării.

4. Secvenţa obţinută după eşantioanarea cu $F_s = 75$ Hz este:

$$x(n) = x_a\left(\frac{n}{F_s}\right) = 2\cos\left(2\pi\frac{50}{75}n\right) = 2\cos\left(2\pi\frac{2}{3}n\right) \Rightarrow f = \frac{2}{3} \notin \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

$\Rightarrow$ frecvenţa discretă trebuie adusă în intervalul fundamental. Din relaţia (1.9) avem:

$$f_k = f_0 + k, \qquad -\frac{1}{2} \le f_0 \le \frac{1}{2}.$$

În acest caz particular:

$$f' = f - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3} \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow x'(n) = 2\cos\left[2\pi\left(-\frac{1}{3}\right)n\right] = 2\cos\left(2\pi\frac{1}{3}n\right)$$

$$\Rightarrow f = \frac{1}{3} \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow \text{ perioada este } N = 3.$$

5.

$$f = \frac{F}{F_s} \Rightarrow F = f \cdot F_s = \frac{1}{3}75 = 25, \qquad 0 < 25 < \frac{75}{2}.$$

Rezultă că semnalul analogic: $y_a(t) = 2\cos(2\pi 25t)$, eşantionat cu $F_s = 75$ Hz, produce aceleaşi eşantioane ca cele de la punctul 4. În concluzie, $F = 50$ Hz este un alias pentru $F = 25$ Hz, pentru o rată de eşantionare de $F_s = 75$ eşantioane/secundă.

6. Semnalul reconstituit din eşantioanele de la punctul 4 este:

$$\tilde{x}_a(t) = x(tF_s) = 2\cos\left(2\pi\frac{1}{3}75t\right) = 2\cos(50\pi t).$$

Distorsiunea semnalul analogic original a fost determinată de efectul de alias, deoarece a fost utilizată o rată de eşantionare prea mică (mai mică decât dublul frecvenţei semnalului analogic original).

Capitolul 2 – Sisteme discrete

Problema 4 – Caracterizarea sistemelor discrete: Se consideră un sistem discret LTI caracterizat în domeniul timp de ecuaţia cu diferenţe finite:

$$y(n) - 5y(n-1) + 4y(n-2) = x(n) + x(n-1).$$

Se cere:

1. Să se determine ieşirea sistemului, $y(n)$, la secvenţa de intrare: $x(n) = (1/4)^n u(n)$, ştiind că $y(-2) = y(-1) = 1$;
2. Să se evalueze răspunsul la impuls $h(n)$.

Rezolvare

1. Dorim să aflăm ieşirea sistemului, $y(n)$, $n \ge 0$, pentru un semnal de intrare dat $x(n)$, $n \ge 0$ şi un set de condiţii iniţiale. Soluţia totală are două componente: componenta omogenă şi componenta particulară:

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n)$$

unde: $y_h(n)$ se numeşte soluţie omogenă, iar $y_p(n)$ se numeşte soluţie particulară.

Soluţia omogenă a ecuaţiei cu diferenţe finite. Vom începe cu rezolvarea ecuaţiei liniare cu diferenţe finite şi coeficienţi constanţi (considerând că intrarea $x(n) = 0$). Astfel vom obţine prima dată soluţia ecuaţiei cu diferenţe finite omogene:

$$y(n) - 5y(n-1) + 4y(n-2) = 0.$$

Considerăm că soluţia este de forma unei exponenţiale, adică: $y_h(n)=\lambda^n$, unde indicele h folosit cu $y(n)$ este folosit pentru a menţiona că este vorba de soluţia omogenă a ecuaţiei cu diferenţe finite. Dacă substituim această soluţie în ecuaţia omogenă, obţinem ecuaţia polinomială:

$$\lambda^n-5\lambda^{n-1}+4\lambda^{n-2}=0\Leftrightarrow\lambda^{n-2}\left(\lambda^2-5\lambda+4\right)=0,$$

denumită şi ecuaţie caracteristică. Rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt:

$$\lambda_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm3}{2}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=1\\ \lambda_2=4\end{cases}$$

Deoarece rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt supraunitare în modul $|\lambda_i|>1$, este vorba despre un sistem instabil. Având radăcinile ecuaţiei caracteristice, putem evalua soluţia ecuaţiei omogene, de forma:

$$y_h(n)=\left[C_1\lambda_1{}^n+C_2\lambda_2{}^n\right]u(n)=\left[C_1(1)^n+C_2(4)^n\right]u(n)=\left[C_1+C_2(4)^n\right]u(n)$$

unde C_1 şi C_2 se numesc coeficienţi de ponderare; se determină din condiţiile iniţiale.

Soluţia particulară a ecuaţiei cu diferenţe finite. Soluţia particulară, $y_p(n)$, trebuie să satisfacă ecuaţia cu diferenţe finite iniţială, pentru semnalul de intrare dat $x(n)$, $n\geq0$. Cu alte cuvinte, $y_p(n)$ este o soluţie care satisface relaţia:

$$y_p(n)-5y_p(n-1)+4y_p(n-2)=x(n)+x(n-1).$$

Pentru $y_p(n)$ considerăm o formă ce depinde de forma semnalului de intrare, $x(n)$. Deoarece secvenţa de intrare considerată pentru acest sistem este produsul dintre o constantă 1 şi o exponenţială $(1/4)^n$, soluţia particulară corespunzătoare ecuaţiei neomogene, este:

$$y_p(n)=K\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n),$$

unde K este un factor de scalare care satisface relaţia (în ecuaţia iniţială):

$$K\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)-5K\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}u(n-1)+4K\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}u(n-1)=\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}u(n-1)$$

Pentru a determina valoarea lui K, trebuie să evaluăm ecuaţia anterioară pentru orice $n\geq2$. Deci:

$$K\left(\frac{1}{4}\right)^n-5K\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+4K\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}=\left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\Bigg|\cdot4^n$$

$$\Leftrightarrow K-20K+64K=1+4\Leftrightarrow45K=5\Rightarrow K=\frac{1}{9}$$

Ca atare, soluţia particulară a ecuaţiei cu diferenţe finite este:

$$\Rightarrow y_p(n)=\frac{1}{9}\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n).$$

Soluţia totală a ecuaţiei cu diferenţe finite. Soluţia totală, este suma dintre soluţia omogenă şi cea particulară, adică:

$$y(n)=\left[C_1+C_2(4)^n+\frac{1}{9}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u(n).$$

Constantele C_1 şi C_2 se determină din condiţiile iniţiale $y(0)$ şi $y(1)$:

$$n=0\qquad y(0)=5y(-1)-4y(-2)+x(0)+x(-1)\Rightarrow y(0)=5-4+1=2$$

$$n=1\qquad y(1)=5y(0)-4y(-1)+x(1)+x(0)\Rightarrow y(1)=10-4+\frac{1}{4}+1=\frac{29}{4}$$

Având condiţiile iniţiale $y(0)=2$ şi $y(1)=29/4$, putem afla constantele C_1 şi C_2:

$$\begin{cases} C_1+C_2+\dfrac{1}{9}=2 \\ C_1+4C_2+\dfrac{1}{9}\dfrac{1}{4}=\dfrac{29}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1+C_2=\dfrac{17}{9} \\ C_1+4C_2=\dfrac{65}{9}\Big|\cdot(-1) \end{cases}\Bigg| +$$

$$\begin{cases} / \quad -3C_2=\dfrac{17}{9}-\dfrac{65}{9}=-\dfrac{16}{3} \\ C_1+C_2=\dfrac{17}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2=\dfrac{16}{9} \\ C_1=\dfrac{17}{9}-\dfrac{16}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1=\dfrac{1}{9} \\ C_2=\dfrac{16}{9} \end{cases}$$

Ieşirea sistemului este:

$$y(n)=\left[\underbrace{\frac{1}{9}+\frac{16}{9}(4)^n}_{y_{zi}(n)}+\underbrace{\frac{1}{9}\left(\frac{1}{4}\right)^n}_{y_{zs}(n)}\right]u(n),$$

unde $y_{zi}(n)$ este răspunsul sistemului la intrarea zero – contribuţia sistemului (răspuns natural/răspuns liber), iar $y_{zs}(n)$ este răspunsul sistemului în condiţii initiale nule – contribuţia intrării (răspuns forţat).

2. **Răspunsul la impuls** îl obţinem considerând ca semnal de intrare impulsul unitate:

$$x(n)=\delta(n)=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & \text{in rest}\end{cases} \Rightarrow y(n)=h(n)$$

$$\Rightarrow x(n)=0, \quad \forall n>0 \qquad \Rightarrow y_p(n)=h_p(n)=0$$

Răspunsul la impuls va avea doar componenta omogenă, adică:

$$h(n)=\left[D_1\lambda_1^{\,n}+D_2\lambda_2^{\,n}\right]u(n)=\left[D_1+D_2(4)^n\right]u(n),$$

unde λ_1 şi λ_2 sunt rădăcinile ecuaţiei caracteristice, determinate anterior.

Considerăm că sistemul este cauzal ($h(n)=0$, $\forall n<0$) şi evaluăm condiţiile iniţiale:

$$\begin{array}{ll} n=0 & h(0)=5h(-1)-4h(-2)+\delta(0)+\delta(-1)\Rightarrow h(0)=1 \\ n=1 & h(1)=5h(0)-4h(-1)+\delta(1)+\delta(0)\Rightarrow h(1)=5+1=6 \end{array} \Rightarrow \text{C.I.}\begin{cases}h(0)=1\\ h(1)=6\end{cases}$$

Evaluăm coeficienţii D_1 şi D_2:

$$\begin{cases} D_1+D_2=1\big|\cdot(-1) \\ D_1+4D_2=6 \end{cases}\Bigg| +$$

$$\begin{cases} / \quad 3D_2=5 \\ D_1+D_2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D_2=\dfrac{5}{3} \\ D_1=1-\dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D_1=-\dfrac{2}{3} \\ D_2=\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

Răspunsul sistemului la impuls este:

$$h(n)=\left[-\frac{2}{3}+\frac{5}{3}(4)^n\right]u(n).$$

Problema 5 – Răspunsul la impuls și ecuația de intrare-ieșire: Se consideră un sistem cauzal care produce la ieşire secvenţa $y(n)=\begin{cases}1, & n=0,\\ \frac{5}{6}, & n=1,\\ 0, & \text{in rest,}\end{cases}$ la excitaţia $x(n)=\begin{cases}1, & n=0,\\ -\frac{5}{6}, & n=1,\\ \frac{1}{6}, & n=2,\\ 0, & \text{in rest.}\end{cases}$

Se doreşte determinarea răspunsului la impuls, $h(n)$, şi a ecuaţiei cu diferenţe finite şi coeficienţi constanţi corespunzătoare.

Rezolvare

Aplicăm transformata în z secvenţei de ieşire:

$$Y(z)=1+\frac{5}{6}z^{-1}.$$

Transformata în z corespunzătoare secvenţei de la intrare este:

$$X(z)=1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}.$$

Având transformatele în z corespunzătoare secvenţelor de intrare, respectiv de ieşire, putem evalua funcţia de transfer:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+\frac{5}{6}z^{-1}}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}=\frac{1+\frac{5}{6}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

Deoarece sistemul este cauzal, regiunea sa de convergenţă este $|z|>1/2$. Sistemul este stabil, deoarece polii se află în interiorul cercului unitate.

Ecuaţia cu diferenţe finite şi coeficienţi constanţi este:

$$y(n)=\frac{5}{6}y(n-1)-\frac{1}{6}y(n-2)+x(n)+\frac{5}{6}x(n-1)$$

Răspunsul la impuls se obţine aplicând transformata în z inversă funcţiei de sistem. În prealabil trebuie să descompunem funcţia de transfer în fracţii simple, de forma:

$$H(z)=\frac{A_1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{A_2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$\Rightarrow A_1\Big|_{z^{-1}=2}=\frac{1+\frac{5}{6}2}{1-\frac{1}{3}2}=8 \qquad\qquad \Rightarrow A_2\Big|_{z^{-1}=3}=\frac{1+\frac{5}{6}3}{1-\frac{1}{2}3}=-7$$

Având coeficienţii A_1 şi A_2, putem scrie expresia funcţiei de transfer descompusă în fracţii simple:

$$H(z)=\frac{8}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{7}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}.$$

În consecinţă, răspunsul la impuls va fi:

$$h(n)=Z^{-1}\{H(z)\}=\left[8\left(\frac{1}{2}\right)^n-7\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]u(n).$$

Problema 6 – Evaluarea ieșirii, cunoscând răspunsul la impuls și excitația: Se doreşte determinarea secvenţei de la ieşirea sistemului care are răspunsul la impuls:

$$h(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n), \qquad n \in \mathbb{Z}$$

dacă semnalul de la intrarea este: $x(n) = 3e^{j\frac{\pi}{3}n}, \qquad n \in \mathbb{Z}$.

Rezolvare

Răspunsul în frecvenţă al acestui sistem este:

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n e^{-j\omega n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}}.$$

Pentru $\omega = \pi/3$, funcţia răspuns în frecvenţă devine:

$$H\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\frac{\pi}{3}}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} - j\sin\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{6\left(5 - j\sqrt{3}\right)}{\left(5 + j\sqrt{3}\right)\left(5 - j\sqrt{3}\right)} = 0.357 - j0.371,$$

iar modulul, respectiv faza sunt date de relaţiile:

$$\left|H\left(\frac{\pi}{3}\right)\right| = \sqrt{0.357^2 + (-0.371)^2} = 0.514, \qquad \angle H\left(\frac{\pi}{3}\right) = \arctan\left(\frac{-0.371}{0.357}\right) = -46.1^0.$$

Secvenţa de ieşire se evaluează cu ajutorul relaţiei (2.10) : $y(n) = AH(\omega_0)e^{j\omega_0 n}$, adică

$$y(n) = 3H\left(\frac{\pi}{3}\right)e^{j\frac{\pi}{3}n} = 3\left|H\left(\frac{\pi}{3}\right)\right|e^{j\frac{\pi}{3}n + \angle H\left(\frac{\pi}{3}\right)} = 3\cdot 0.514 \cdot e^{j\frac{\pi}{3}n - 46.1^0} = 1.542e^{j\frac{\pi}{3}n - 46.1^0}$$

Se observă că singurul efect al sistemului asupra semnalului de intrare constă în scalarea amplitudinii cu 0.514 şi defazarea cu 46.1^0. Semnalul de ieşire este în acest caz o exponenţială complexă cu frecvenţa $\pi/3$, amplitudine 1.542 şi fază 46.1^0.

Problema 7 – Ieșirea unui sistem LTI la o excitație exponențială: Acest exemplu are ca scop determinarea răspunsului la secvenţa de intrare:

$$x(n) = 9^n u(n),$$

pentru sistemul descris de ecuaţia cu diferenţe finite şi coeficienţi constanţi:

$$y(n) = 0.9y(n-1) - 0.81y(n-2) + x(n),$$

ştiind că:

1. $y(-1) = y(-2) = 0$;
2. $y(-1) = y(-2) = 1$;

utilizând transformata în z.

Rezolvare

Funcţia de sistem corespunzătoare ecuaţiei cu diferenţe finite şi coeficienţi constanţi este:

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.9z^{-1} + 0.81z^{-2}}.$$

Cei doi poli corespunzători lui $H(z)$: $p_{1,2} = 0.9e^{\pm j\frac{\pi}{3}}$, au valori complex-conjugate.

Transformata în z corespunzătoare secvenţei de intrare este:

$$X(z) = Z\left\{9^n u(n)\right\} = \frac{1}{1-9z^{-1}}.$$

Răspunsul de stare zero al sistemului, în domeniul z este:

$$Y_{zs}(z) = H(z)X(z) = \frac{1}{\left(1-0.9e^{j\frac{\pi}{3}}z^{-1}\right)\left(1-0.9e^{-j\frac{\pi}{3}}z^{-1}\right)\left(1-9z^{-1}\right)}.$$

Pentru a afla răspunsul forţat în domeniul timp, vom descompune $Y_{zs}(z)$ în fracţii simple şi apoi aplicăm transformata în z inversă:

$$Y_{zs}(z) = \frac{A_1}{1-0.9e^{j\frac{\pi}{3}}z^{-1}} + \frac{A_2}{1-0.9e^{-j\frac{\pi}{3}}z^{-1}} + \frac{A_3}{1-9z^{-1}}$$

Evaluând pentru $z^{-1} = \frac{1}{0.9e^{j\frac{\pi}{3}}}$ obţinem coeficientul A_1:

$$A_1\Big|_{z^{-1}=\frac{1}{0.9e^{j\frac{\pi}{3}}}} = \frac{1}{\left(1-0.9e^{-j\frac{\pi}{3}}\frac{1}{0.9e^{j\frac{\pi}{3}}}\right)\left(1-\frac{9}{0.9e^{j\frac{\pi}{3}}}\right)} = \frac{1}{\left(1-e^{-j\frac{2\pi}{3}}\right)\left(1-10e^{-j\frac{\pi}{3}}\right)}$$

$$= \frac{1}{\left[1-\left(\cos\frac{2\pi}{3} - j\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]\left[1-10\left(\cos\frac{\pi}{3} - j\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]} = \frac{1}{\left[1-\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]\left[1-10\left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]}$$

$$= \frac{2}{\left(3+j\sqrt{3}\right)\left(-4+j5\sqrt{3}\right)} = \frac{2}{-27+j11\sqrt{3}} = \frac{2\left(-27-j11\sqrt{3}\right)}{\left(-27+j11\sqrt{3}\right)\left(-27-j11\sqrt{3}\right)} = \frac{-54-j38.105}{1092}$$

$$\Rightarrow A_1 = -0.0495 - j0.0349.$$

Deoarece polii p_1 şi p_2 au valori complex-conjugate, şi coeficienţii A_1 şi A_2 vor avea valori complex-conjugate, adică:

$$A_2 = A_1^* = -0.0495 + j0.0349.$$

Evaluând pentru $z^{-1} = 1$ obţinem coeficientul A_3:

$$A_3\Big|_{z^{-1}=\frac{1}{9}} = \frac{1}{1-0.9\frac{1}{9}+0.81\frac{1}{81}} = \frac{1}{0.91} \qquad \Rightarrow A_3 = 1.0989.$$

$$\Rightarrow Y_{zs}(z) = \frac{-0.0495-j0.0349}{1-0.9e^{j\frac{\pi}{3}}z^{-1}} + \frac{-0.0495+j0.0349}{1-0.9e^{-j\frac{\pi}{3}}z^{-1}} + \frac{1.0989}{1-9z^{-1}}.$$

În consecinţă, răspunsul de stare iniţială nulă al sistemului este:

$$y_{zs}(n) = \left[\left(-0.0495-j0.0349\right)\left(0.9e^{j\frac{\pi}{3}}\right)^n + \left(-0.0495+j0.0349\right)\left(0.9e^{-j\frac{\pi}{3}}\right)^n + 1.0989(9)^n\right]u(n)$$

$$= \left[-0.0495(0.9)^n\left(e^{j\frac{\pi}{3}n} + e^{-j\frac{\pi}{3}n}\right) - j0.0349(0.9)^n\left(e^{j\frac{\pi}{3}n} - e^{-j\frac{\pi}{3}n}\right) + 1.0989(9)^n\right]u(n)$$

$$= \left[-0.099(0.9)^n\cos\frac{\pi n}{3} + 0.0698(0.9)^n\sin\frac{\pi n}{3} + 1.0989(9)^n\right]u(n)$$

$$= \left[(0.9)^n\left(-0.099\cos\frac{\pi n}{3} + 0.0698\sin\frac{\pi n}{3}\right) + 1.0989(9)^n\right]u(n)$$

Folosind identitatea trigonometrică: $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos\left(x-\arctan\dfrac{b}{a}\right)$, obținem:

$$y_{zs}(n) = \left\{(0.9)^n\sqrt{(-0.099)^2+0.0698^2}\cos\left[\frac{\pi}{3}n-\arctan\left(\frac{0.0698}{-0.099}\right)\right]+1.0989(9)^n\right\}u(n)$$

$$=\left[(0.9)^n\,0.1211\cos\left(\frac{\pi}{3}n+\arctan 0.705\right)+1.0989(9)^n\right]u(n)$$

$$=\left[(0.9)^n\,0.1211\cos\left(\frac{\pi}{3}n+35.1858^0\right)+1.0989(9)^n\right]u(n)$$

$$\Rightarrow y_{zs}(n)=\left[0.1211(0.9)^n\cos\left(\frac{\pi}{3}n+35.1858^0\right)+1.0989(9)^n\right]u(n).$$

1. Deoarece condiţiile iniţiale sunt nule, ieşirea sistemului va fi:

$$y(n)=y_{zs}(n)=\left[0.1211(0.9)^n\cos\left(\frac{\pi}{3}n+35.1558^0\right)+1.0989(9)^n\right]u(n)$$

2. În acest caz condiţiile iniţiale sunt nenule, $y(-1)=y(-2)=1$, şi vom avea încă o componentă la transformata în z (transformata în z a răspunsului când intrarea este nulă):

$$Y_{zi}(z)=\frac{-\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}\sum_{n=1}^{k}y(-n)z^n}{A(z)}=\frac{0.09-0.81z^{-1}}{1-0.9z^{-1}+0.81z^{-2}}=\frac{D_1}{1-0.9e^{j\frac{\pi}{3}}z^{-1}}+\frac{D_2}{1-0.9e^{-j\frac{\pi}{3}}z^{-1}}$$

Evaluăm constantele D_1 şi D_2:

$$D_1\Big|_{z^{-1}=\frac{1}{0.9e^{j\frac{\pi}{3}}}}=D_2^*=\frac{0.09-0.81\dfrac{1}{0.9e^{j\frac{\pi}{3}}}}{1-0.9e^{-j\frac{\pi}{3}}\dfrac{1}{0.9e^{j\frac{\pi}{3}}}}=\frac{0.09-0.9e^{-j\frac{\pi}{3}}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{3}}}=\frac{0.09-0.9\left(\dfrac{1}{2}-j\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1-\left(-\dfrac{1}{2}-j\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$=\frac{-0.72+j0.9\sqrt{3}}{3+j\sqrt{3}}=\frac{\left(-0.72+j0.9\sqrt{3}\right)\left(3-j\sqrt{3}\right)}{\left(3+j\sqrt{3}\right)\left(3-j\sqrt{3}\right)}=\frac{0.54+j3.42\sqrt{3}}{9+3}=\frac{0.54+j5.9236}{12}$$

$$\Rightarrow D_1=0.045+j0.4936 \qquad \Rightarrow D_2=0.045-j0.4936$$

$$\Rightarrow Y_{zi}(z)=\frac{0.045+j0.4936}{1-0.9e^{j\frac{\pi}{3}}z^{-1}}+\frac{0.045-j0.4936}{1-0.9e^{-j\frac{\pi}{3}}z^{-1}}$$

În consecinţă, răspunsul la intrare zero este:

$$y_{zi}(n)=\left[(0.045+j0.4936)\left(0.9e^{j\frac{\pi}{3}}\right)^n+(0.045-j0.4936)\left(0.9e^{-j\frac{\pi}{3}}\right)^n\right]u(n)$$

$$=\left[0.045(0.9)^n\left(e^{j\frac{\pi}{3}n}+e^{-j\frac{\pi}{3}n}\right)+j0.4936(0.9)^n\left(e^{j\frac{\pi}{3}n}-e^{-j\frac{\pi}{3}n}\right)\right]u(n)$$

$$=\left[0.09(0.9)^n\cos\frac{\pi n}{3}-0.9872(0.9)^n\sin\frac{\pi n}{3}+1.0989\right]u(n)$$

$$=\left[(0.9)^n\sqrt{0.09^2+(-0.9872)^2}\cos\left[\frac{\pi}{3}n-\arctan\left(\frac{-0.9872}{0.09}\right)\right]\right]u(n)=$$

$$=\left[(0.9)^n 0.9913\cos\left(\frac{\pi}{3}n+\arctan 10.9689\right)\right]u(n)=\left[(0.9)^n 0.9913\cos\left(\frac{\pi}{3}n+84.79^0\right)\right]u(n)$$

$$\Rightarrow y_{z1}(n)=\left[0.9913(0.9)^n\cos\left(\frac{\pi}{3}n+84.79^0\right)\right]u(n).$$

Răspunsul total are transformata în z:

$$Y(z)=Y_{zs}(z)+Y_{zi}(z)=\frac{-0.0045+j0.4587}{1-0.9e^{j\frac{\pi}{3}}z^{-1}}+\frac{-0.0045-j0.4587}{1-0.9e^{-j\frac{\pi}{3}}z^{-1}}+\frac{1.0989}{1-9z^{-1}}$$

Aplicând transformata în z inversă răspunsului total din domeniul z, obţinem ieşirea sistemului:

$$y(n)=\left[(-0.0045+j0.4587)(0.9)^n e^{j\frac{\pi}{3}n}+(-0.0045-j0.4587)(0.9)^n e^{-j\frac{\pi}{3}n}+1.0989(9)^n\right]u(n)$$

$$=\left[-0.0045(0.9)^n\left(e^{j\frac{\pi}{3}n}+e^{-j\frac{\pi}{3}n}\right)+j0.4587(0.9)^n\left(e^{j\frac{\pi}{3}n}-e^{-j\frac{\pi}{3}n}\right)+1.0989(9)^n\right]u(n)$$

$$=\left[-0.009(0.9)^n\cos\frac{\pi n}{3}-0.9174(0.9)^n\sin\frac{\pi n}{3}+1.0989(9)^n\right]u(n)$$

$$=\left[(0.9)^n\sqrt{(-0.009)^2+(-0.9174)^2}\cos\left(\frac{\pi n}{3}-\arctan\frac{-0.9174}{-0.009}\right)+1.0989(9)^n\right]u(n)$$

$$=\left[(0.9)^n 0.9174\cos\left(\frac{\pi n}{3}-\arctan 101.93\right)+1.0989(9)^n\right]u(n)$$

$$=\left[(0.9)^n 0.9174\cos\left(\frac{\pi n}{3}-89.438^0\right)+1.0989(9)^n\right]u(n)$$

$$\Rightarrow y(n)=\left[(0.9)^n 0.9174\cos\left(\frac{\pi n}{3}-89.438^0\right)+1.0989(9)^n\right]u(n)$$

Problema 8 – Evaluarea răspunsului la impuls și a regiunii de convergență: Se consideră un sistem LTI este caracterizat de funcţia de transfer:

$$H(z)=\frac{3-4z^{-1}}{1-3.5z^{-1}+1.5z^{-2}}.$$

Să se specifice regiunea de convergenţă a lui $H(z)$ şi să se determine răspunsul la impuls, $h(n)$, în următoarele condiţii:

1. Sistemul este stabil;
2. Sistemul este cauzal;
3. Sistemul este anticauzal.

Rezolvare

Pentru a putea evalua răspunsul la impuls, trebuie descompus $H(z)$ în fracţii simple. Polii sistemului sunt $p_1=\frac{1}{2}$ şi $p_2=3$.

$$H(z)=\frac{A_1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{A_2}{1-3z^{-1}}$$

$$\Rightarrow A_1\big|_{z^{-1}=2}=\frac{3-4\cdot 2}{1-3\cdot 2}=1 \qquad \Rightarrow A_2\big|_{z^{-1}=\frac{1}{3}}=\frac{3-4\cdot\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=2$$

$$\Rightarrow H(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{2}{1-3z^{-1}}$$

1. Deoarece sistemul este stabil, regiunea de convergenţă trebuie să includă cercul unitate, deci $1/2<|z|<3$. În consecinţă, răspunsul la impuls este necauzal:

$$h(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)-2(3)^n u(-n-1).$$

2. Deoarece sistemul este cauzal, $|z|>3$, iar

$$h(n)=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n+2(3)^n\right]u(n).$$

Sistemul este instabil, deoarece conţine $(3)^n u(n)$.

3. Dacă sistemul este anticauzal, regiunea de convergenţă este $|z|<1/2$, şi

$$h(n)=-\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n+2(3)^n\right]u(-n-1).$$

Sistemul este instabil, deoarece conţine $\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$.

Problema 9 – Evaluarea convoluției liniare: Acest exemplu urmăreşte evaluarea ieşirii unui sistem, cu ajutorul convoluţiei liniare dintre secvenţa de la intrarea sistemului şi răspunsul la impuls al acestuia.

Se consideră secvenţa de intrare: $x(n)=\left\{\underset{\uparrow}{1},2,3,4\right\}$ şi răspunsul la impuls: $h(n)=\left\{\underset{\uparrow}{1},-1,1,-2\right\}$.

Convoluţia liniară va fi evaluată prima dată folosind metoda grafică, apoi utilizând transformata în z.

Rezolvare

Metoda 1. Evaluarea convoluţiei liniare cu metoda grafică

Reprezentăm gafic cele două secvenţe, $h(k)$ şi $x(k)$ (figura 2.16. a)), folosind k drept indice, pentru a fi în acord cu relaţia (2.15).

Realizăm simetrica secvenţei $h(k)$, obţinem secvenţa $h(-k)$ şi o reprezentăm grafic (figura 2.16. b)); acum putem evalua ieşirea la momentul $n=0$, conform relaţiei (2.15), adică

$$y(0)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(-k).$$

Secvenţa produs $v_0(k)\equiv x(k)h(-k)$ este de asemenea reprezentată grafic în figura 2.16. b). Adunând toţi termenii secvenţei produs, obţinem $y(0)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} v_0(k)=1$.

Continuăm calculul evaluând ieşirea pentru $n<0$, de exemplu la $n=-1$. Pentru aceasta, translatăm secvenţa $h(-k)$ cu 1 eşantion, spre stânga (figura 2.16. c)). Conform relaţiei (2.15)

$$y(-1)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(-1-k).$$

Secvenţa produs $v_{-1}(k)\equiv x(k)h(-1-k)$ este de asemenea reprezentată grafic în figura 2.16. c). Adunând toţi termenii secvenţei produs, obţinem $y(-1)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} v_{-1}(k)=0$.

Observăm că dacă continuăm să translatăm secvenţa $h(-1-k)$, spre stânga, secvenţele produs obţinute vor avea toate eşantioanele nule. Ca atare, putem spune că $y(n)=0$, $n\le -1$.

Evaluăm acum ieşirea, $y(n)$, pentru $n>0$. Începem cu $n=1$. Pentru aceasta, translatăm secvenţa $h(-k)$ cu 1 eşantion, spre dreapta, şi obţinem secvenţa $h(1-k)$ (figura 2.16. d)). Conform relaţiei (2.15)

$$y(1)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(1-k).$$

Secvenţa produs $v_1(k)\equiv x(k)h(1-k)$ este de asemenea reprezentată grafic în figura 2.16. d). Adunând toţi termenii secvenţei produs, obţinem $y(1)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} v_1(k)=-1+2=1$.

În mod similar obţinem secvenţa $y(2)$, translatând $h(-k)$ cu 2 eşantioane, spre dreapta (figura 2.16. e)). Secvenţa produs $v_2(k)\equiv x(k)h(2-k)$ este de asemenea reprezentaă grafic în figura 2.16. e). Adunând toţi termenii secvenţei produs, obţinem $y(2)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} v_2(k)=1-2+3=2$.

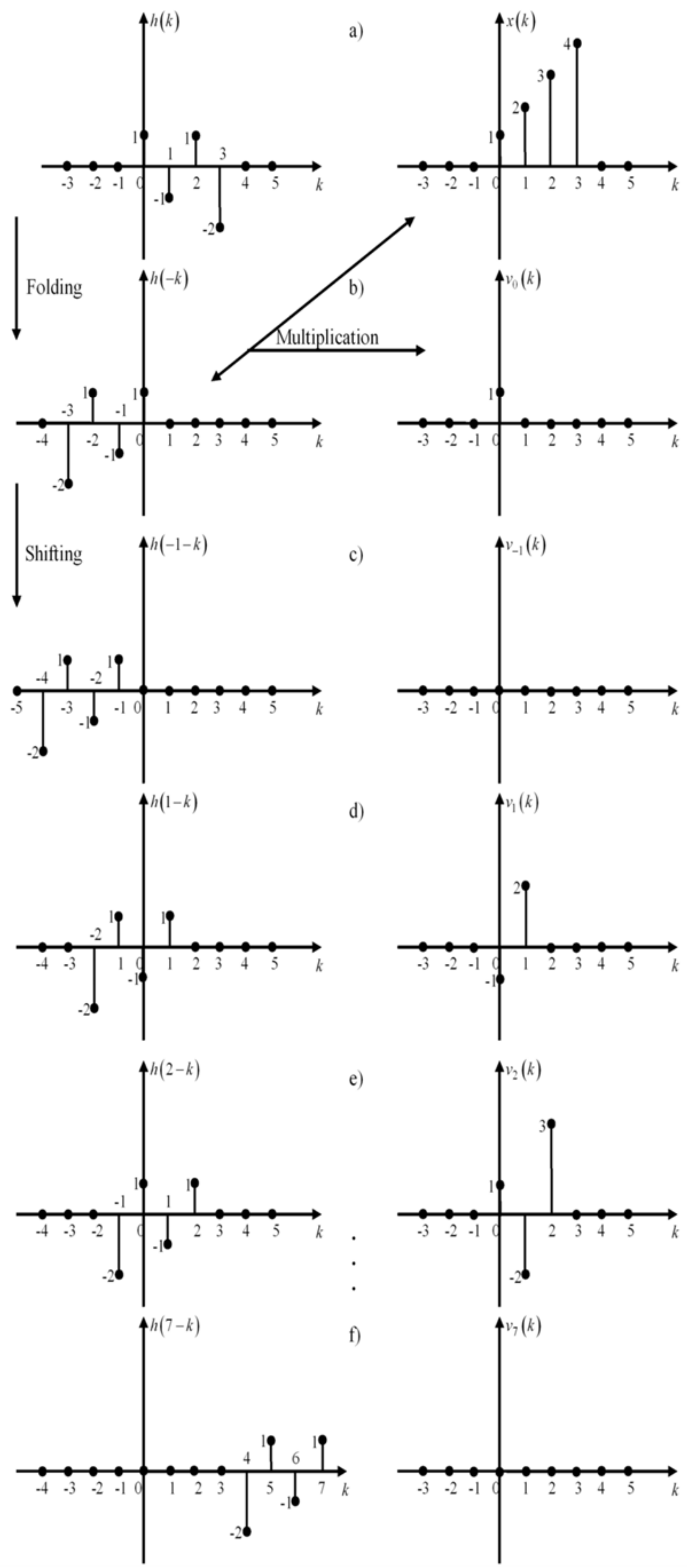


Figura 2.16. Evaluarea convoluţiei liniare, folosind metoda grafică

Translatând în continuare secvenţa $h(-k)$ cu 3, 4, … eşantioane, spre dreapta, înmulţind secvenţele corespunzătoare şi adunând valorile secvenţelor produs rezultate, obţinem $y(3)=1$, $y(4)=-5$, $y(5)=-2$, $y(6)=-8$. Pentru $n>6$, obţinem $y(n)=0$, deaoarece secvenţele produs corespunzătoare au valori nule.

Acum avem întregul răspuns al sistemului pentru $-\infty<n<\infty$:

$$y(n)=\{\ldots,0,\underset{\uparrow}{1},1,2,1,-5,-2,-8,0,\ldots\}.$$

***Metoda 2**. Evaluarea convoluţiei liniare cu ajutorul transformatei în* z

$$Z\{x(n)\}=X(z)=1+2z^{-1}+3z^{-2}+4z^{-3},$$

$$Z\{h(n)\}=H(z)=1-z^{-1}+z^{-2}-2z^{-3},$$

$$Y(z)=X(z)H(z)=\left(1+2z^{-1}+3z^{-2}+4z^{-3}\right)\left(1-z^{-1}+z^{-2}-2z^{-3}\right)=$$

$$\begin{array}{lllllll}
=1 & -z^{-1} & +z^{-2} & -2z^{-3}+ & & & \\
 & +2z^{-1} & -2z^{-2} & +2z^{-3} & -4z^{-4}+ & & \\
 & & +3z^{-2} & -3z^{-3} & +3z^{-4} & -6z^{-5}+ & \\
 & & & +4z^{-3} & -4z^{-4} & +4z^{-5} & -8z^{-6}= \\
=1 & +z^{-1} & +2z^{-2} & +z^{-3} & -5z^{-4} & -2z^{-5} & -8z^{-6}.
\end{array}$$

Rezultă

$$Z^{-1}\{Y(z)\}=y(n)=\{\underset{\uparrow}{1},1,2,1,-5,-2,-8\}.$$

Problema 10 – Evaluarea ieşirii unui sistem cu ajutorul convoluţiei liniare: Se urmăreşte determinarea ieşirii $y(n)$ a unui sistem LTI relaxat, al cărui răspuns la impuls este:

$$h(n)=a^n u(n),\qquad |a|<1,$$

la treapta unitate $x(n)=u(n)$.

Rezolvare

În acest caz, atât $h(n)$ cât şi $x(n)$ sunt secvenţe de durată infinită. Vom folosi formula de convoluţie dată de relaţia (2.14):

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x(n-k),$$

unde secvenţa reflectată este $x(k)$.

- pentru $n=0$ avem: $y(0)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x(-k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a^k u(k)u(-k)=a^0=1$.
- pentru $n=1$ avem: $y(1)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x(1-k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a^k u(k)u(1-k)=a^0+a=1+a$.
- pentru $n=2$ avem: $y(2)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x(2-k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a^k u(k)u(2-k)=a^0+a+a^2=1+a+a^2$.

Se observă că pentru $n>0$, ieşirea este

$$y(n)=1+a+a^2+a^3+\cdots+a^n=\frac{1-a^{n+1}}{1-a},\qquad n>0.$$

Pe de altă parte, pentru $n<0$, secvenţele produs vor avea doar valori nule, deci $y(n)=0, \quad n<0$.

Pentru $n \to \infty$, ieşirea este

$$y(\infty)=\lim_{n\to\infty} y(n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-a^{n+1}}{1-a}=\frac{1}{1-a}, \qquad n\to\infty .$$

În concluzie, ieşirea sistemului LTI este:

$$y(n)=\begin{cases} 0, & n<0,\\ 1, & n=0,\\ \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}, & n>0,\\ \dfrac{1}{1-a}, & n\to\infty. \end{cases}$$

Problema 11 – Evaluarea răspunsului folosind convoluția liniară: Se urmăreşte evaluarea convoluţiei liniare dintre:

$$x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \text{ şi } h(n)=\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n).$$

Rezolvare

În acest caz, atât $h(n)$ cât şi $x(n)$ sunt secvenţe de durată infinită. Vom folosi formula de convoluţie dată de relaţia (2.14)

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k),$$

unde secvenţa reflectată este $h(k)$. Secvenţa produs va fi:

$$v_n(k)=x(k)h(n-k)=\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{4}\right)^{n-k},$$

care are valori nenule pentru $k\ge 0$ şi $n-k\ge 0$ sau $n\ge k\ge 0$.

Pentru $n<0$, $v_n(k)=0$, $\forall k$, deci

$$y(n)=0, \qquad n<0 .$$

Pentru $n\ge k\ge 0$ suma valorilor secvenţei produs $v_n(k)$ va fi:

$$y(n)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{4}\right)^{n-k}=\left(\frac{1}{4}\right)^n\sum_{k=0}^{n}2^k=\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(2^{n+1}-1\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right], \qquad n\ge 0$$

Pentru $n\to\infty$, ieşirea este:

$$y(\infty)=\lim_{n\to\infty} y(n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]=0, \qquad n\to\infty .$$

În concluzie, ieşirea sistemului LTI este:

$$y(n)=\begin{cases} 0, & n<0,\\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\left(2-\dfrac{1}{2^n}\right), & n\ge 0. \end{cases}$$

Capitolul 3 – Transformata Fourier Discretă

Problema 12 – evaluarea DFT-ului: Acest exemplu urmăreşte evaluarea transformatei Fourier discrete a unei secvenţe date. Se consideră o secvenţă de lungime 4:

$$x(n)=\{\underset{\uparrow}{1},2,3,4\},$$

pentru care se doreşte evaluarea DFT-ului în 8 puncte.

Rezolvare

Pentru a evalua DFT-ul în 8 puncte, secvenţa trebuie să aibă 8 valori. Vom adăuga zerouri, astfel încât secvenţa $x(n)$ să aibă lungime 8. Obţinem

$$x(n)=\{\underset{\uparrow}{1},2,3,4,0,0,0,0\}$$

Începem cu evaluarea ponderilor

$$W_N^k=W_8^k=e^{-j\frac{2\pi}{8}k}=e^{-j\frac{\pi}{4}k},\ k=\overline{0,7}.$$

Ţinând cont de condiţia de simetrie $W_N^{k+N/2}=-W_N^k$, în cazul acestui exemplu

$$W_8^7=-W_8^3,\quad W_8^6=-W_8^2,\quad W_8^5=-W_8^1,\quad W_8^4=-W_8^0,$$

avem:

$$W_8^0=e^{-j\frac{\pi}{4}0}=1$$

$$W_8^1=e^{-j\frac{\pi}{4}1}=\cos\frac{\pi}{4}-j\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-j\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$W_8^2=e^{-j\frac{\pi}{4}2}=e^{-j\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}-j\sin\frac{\pi}{2}=-j$$

$$W_8^3=e^{-j\frac{\pi}{4}3}=\cos\frac{3\pi}{4}-j\sin\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-j\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$W_8^4=-W_8^0=-1$$

$$W_8^5=-W_8^1=-\frac{\sqrt{2}}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$W_8^6=-W_8^2=j$$

$$W_8^7=-W_8^3=\frac{\sqrt{2}}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Având calculate rădăcinile unităţii, putem continua cu evaluarea lui $X(k),\quad k=\overline{0,7}$, considerând relaţia (3.1), adică

$$X(k)=\sum_{n=0}^{7}x(n)W_8^{kn},\qquad k=\overline{0,N-1}$$

$$X(k)=x(0)W_8^{k0}+x(1)W_8^{k1}+x(2)W_8^{k2}+x(3)W_8^{k3}+x(4)W_8^{k4}+x(5)W_8^{k5}+x(6)W_8^{k6}+x(7)W_8^{k7}$$
$$=W_8^0+2W_8^k+3W_8^{2k}+4W_8^{3k}$$

şi ţinând cont de condiţia de periodicitate $W_N^{k+N}=W_N^k$, în acest caz $W_8^{k+8}=W_8^k$.

$$X(0)=W_8^0+2W_8^0+3W_8^0+4W_8^0=10W_8^0=10$$

$$X(1)=W_8^0+2W_8^1+3W_8^2+4W_8^3=1+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-3j-4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\left(\sqrt{2}-1\right)-3j\left(\sqrt{2}+1\right)$$

$$X(2)=W_8^0+2W_8^2+3W_8^4+4W_8^6=W_8^0+2W_8^2-3W_8^0-4W_8^2=-2\left(W_8^0+W_8^2\right)=-2(1-j)=-2+2j$$

$$X(3)=W_8^0+2W_8^3+3W_8^6+4W_8^9=W_8^0+2W_8^3-3W_8^2+4W_8^1=1-2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+3j+4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$=1+\sqrt{2}-3j\left(\sqrt{2}-1\right)$$
$$X(4)=W_8^0+2W_8^4+3W_8^8+4W_8^{12}=W_8^0-2W_8^0+3W_8^0-4W_8^0=-2W_8^0=-2$$
$$X(5)=W_8^0+2W_8^5+3W_8^{10}+4W_8^{15}=W_8^0-2W_8^1+3W_8^2-4W_8^3=1-2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-3j+4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$=1+\sqrt{2}+3j\left(\sqrt{2}-1\right)$$
$$X(6)=W_8^0+2W_8^6+3W_8^{12}+4W_8^{18}=W_8^0-2W_8^2-3W_8^0+4W_8^2=-2W_8^0+2W_8^2=-2-2j$$
$$X(7)=W_8^0+2W_8^7+3W_8^{14}+4W_8^{21}=W_8^0-2W_8^3-3W_8^2-4W_8^1=1+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+3j-4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$=-\left(\sqrt{2}-1\right)+3j\left(\sqrt{2}+1\right)$$

Acum putem evalua modulul şi faza pentru $X(k),\ k=\overline{0,7}$.

Indicaţie:

$$|a+jb|=\sqrt{a^2+b^2}\ ,\ \angle(a+jb)=\begin{cases}\arctan\frac{b}{a}, & a>0\\ \pi+\arctan\frac{b}{a}, & a<0\end{cases},$$

iar valorile fazei trebuie reprezentate în domeniul $\left(-\pi,\pi\right]$.

$$|X(0)|=10,\qquad \angle X(0)=0$$
$$|X(1)|=\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2+\left[3\left(\sqrt{2}+1\right)\right]^2}=7.2545$$
$$\angle X(1)=\pi+\arctan\left[\frac{-3\left(\sqrt{2}+1\right)}{-\left(\sqrt{2}-1\right)}\right]=\pi+1.5137=4.6553\left(-2\pi=-1.6279\right)$$
$$|X(2)|=\sqrt{4+4}=2.8284,\qquad \angle X(2)=\pi+\arctan\left(\frac{2}{-2}\right)=\pi-0.7854=2.3562$$
$$|X(3)|=\sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)^2+\left[3\left(\sqrt{2}-1\right)\right]^2}=2.7153,\qquad \angle X(3)=-\arctan\left[\frac{3\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}+1\right)}\right]=-0.4754$$
$$|X(4)|=2,\qquad \angle X(4)=\pi-0=\pi$$
$$|X(5)|=\sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)^2+\left[3\left(\sqrt{2}-1\right)\right]^2}=|X(3)|=2.7153,\qquad \angle X(5)=-\angle X(3)=0.4754$$
$$|X(6)|=|X(2)|=2.8284,\qquad \angle X(6)=-\angle X(2)=-2.3562$$
$$|X(7)|=|X(1)|=7.2545,\qquad \angle X(7)=-\angle X(1)=1.6279$$
$$|X(k)|=\left\{\underset{\uparrow}{10},7.2545,2.8284,2.7153,2,2.7153\ ,2.8284,7.2545\right\}$$
$$\angle X(k)=\left\{\underset{\uparrow}{0},-1.6279,2.3562,-0.4754,3.1416,0.4754,-2.3562,1.6279\right\}$$

Problema 13 – Convoluția circulară: Acest exemplu urmăreşte evaluarea ieşirii unui sistem, cu ajutorul convoluţiei circulare dintre secvenţa de la intrarea sistemului şi răspunsul la impuls al acestuia.

Se consideră secvenţa de intrare: $x(n)=\{\underset{\uparrow}{1},2,3,4\}$ şi răspunsul la impuls $h(n)=\{\underset{\uparrow}{1},-1,1,-2\}$.

Convoluţia circulară va fi evaluată prima dată folosind metoda grafică, apoi utilizând transformata Fourier discretă.

Rezolvare

Metoda 1**. **Evaluarea convoluţiei circulare cu metoda grafică

Fiecare secvenţă conţine 4 valori nenule. Pentru ilustrarea operaţiilor care apar la evaluarea convoluţiei circulare, vom desena fiecarea secvenţă ca puncte ale unui cerc. Reprezentarea secvenţelor $h(k)$ şi $x(k)$ este ilustrată în figura 3.8. a). Menţionăm că secvenţele sunt desenate pe cerc, în sens trigonometric (contrar acelor de ceasornic). Aceasta stabileşte direcţia de referinţă la rotirea unei secvenţe faţă de cealaltă.

Secvenţa $y(n)$ se obţine prin convoluţia circulară dintre $h(k)$ şi $x(k)$, ca în relaţia (3.39). Începând cu $m=0$, obţinem

$$y(0)=\sum_{k=0}^{3}x(k)h((-k))_4 .$$

Secvenţa $h((-k))_4$ este simetrica secvenţei $h(k)$, desenată pe cerc (figura 3.8. b)). Altfel spus, secvenţa simetrică este simplu, secvenţa $h(k)$ desenată în sensul acelor de ceasornic (invers trigonometric). Secvenţa produs se obţine înmulţind $x(k)$ cu $h((-k))_4$, punct cu punct. Secvenţa produs este de asemenea reprezentată în figura 3.8. b). În final, adunând valorile secvenţei produs, obţinem

$$y(0)=1-4+3-4=-4 .$$

Pentru $m=1$ avem: $y(1)=\sum_{k=0}^{3}x(k)h((1-k))_4$. Se verifică uşor faptul că $h((1-k))_4$ este secvenţa $h((-k))_4$ translatată (rotită) în sens trigonometric cu 1 eşantion, ca în figura 3.8. c). Această secvenţă se înmulţeşte cu $x(k)$ pentru obţinerea secvenţei produs (figura 3.8. c)). Adunând toate valorile secvenţei produs, obţinem

$$y(1)=-1+2-6+4=-1 .$$

Pentru $m=2$ avem: $y(2)=\sum_{k=0}^{3}x(k)h((2-k))_4$. Se verifică uşor faptul că $h((2-k))_4$ este secvenţa $h((-k))_4$ translatată (rotită) în sens trigonometric cu 2 eşantioane, ca în figura 3.8. d). Această secvenţă se înmulţeşte cu $x(k)$ pentru obţinerea secvenţei produs (figura 3.8. d)). Adunând toate valorile secvenţei produs, obţinem

$$y(2)=1-2+3-8=-6 .$$

Pentru $m=3$ avem: $y(3)=\sum_{k=0}^{3}x(k)h((3-k))_4$. Se verifică uşor faptul că $h((3-k))_4$ este secvenţa $h((-k))_4$ translatată (rotită) în sens trigonometric cu 3 eşantioane, ca în figura 3.8. e). Această secvenţă se înmulţeşte cu $x(k)$ pentru obţinerea secvenţei produs (figura 3.8. e)). Adunând toate valorile secvenţei produs, obţinem

$$y(3) = -2 + 2 - 3 + 4 = 1.$$

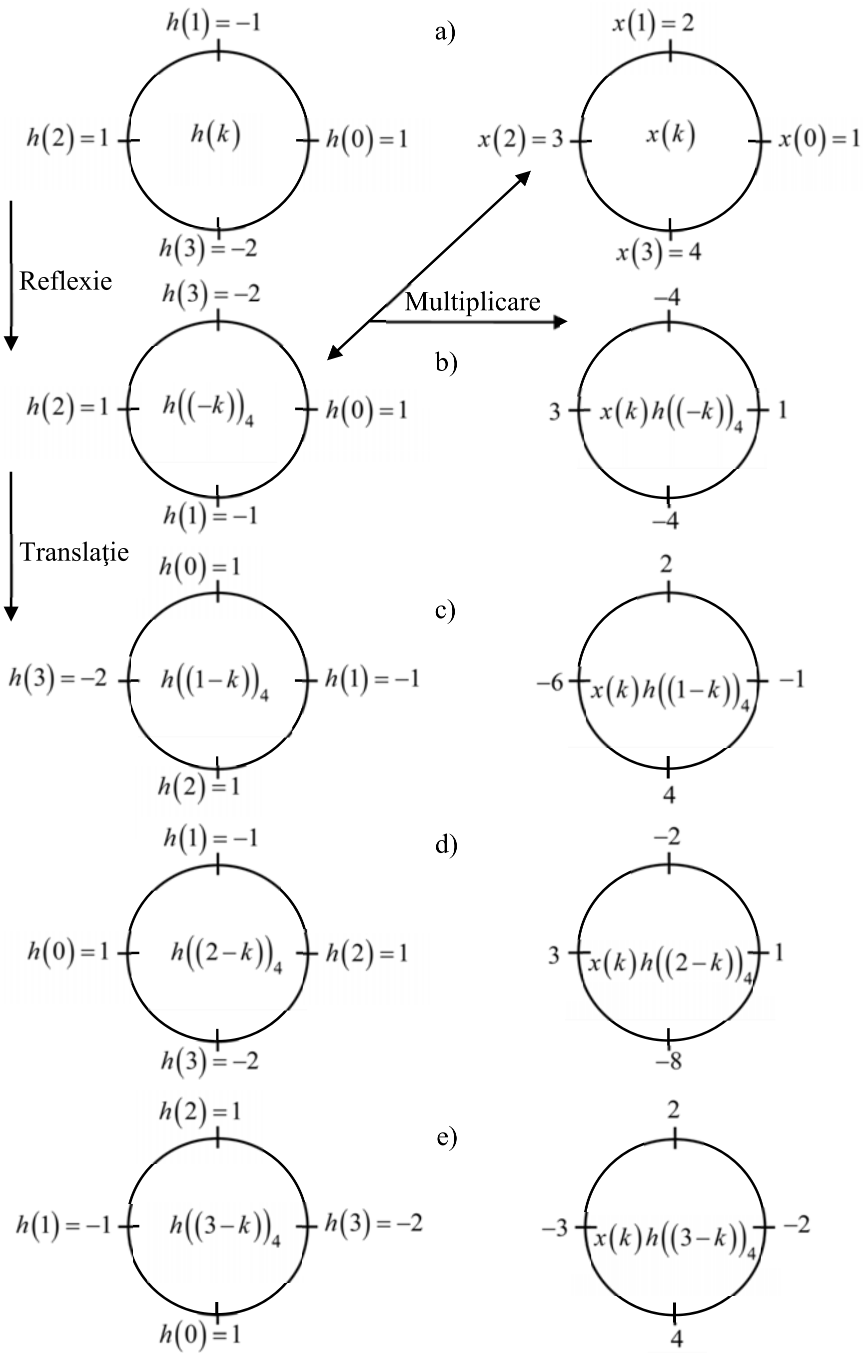


Figura 3.8. Evaluarea convoluţiei circulare, folosind metoda grafică

Observăm că dacă continuăm evaluarea, pentru $m \geq 4$, obţinem aceleaşi patru valori anterioare.

În concluzie, convoluţia circulară a secvenţelor $x(k)$ şi $h(k)$ determină secvenţa:

$$y(n) = \left\{ \underset{\uparrow}{-4}, -1, -6, 1 \right\}.$$

Metoda 2. Evaluarea convoluţiei circulare cu ajutorul transformatei Fourier discrete

Evaluăm prima dată DFT-urile corespunzătoare secvenţelor $x(n)$ şi $h(n)$. DFT în 4 puncte pentru $x(n)$ este:

$$\mathrm{DFT}\{x(n)\} = X(k) = \sum_{n=0}^{3} x(n) e^{-j\frac{2\pi k}{4}n}, \qquad k = \overline{0,3}$$

$$X(k) = 1 + 2e^{-j\frac{2\pi k}{4}1} + 3e^{-j\frac{2\pi k}{4}2} + 4e^{-j\frac{2\pi k}{4}3} = 1 + 2e^{-j\frac{\pi k}{2}} + 3e^{-j\pi k} + 4e^{-j\frac{3\pi k}{2}}$$

$$= 1 + 2\left(\cos\frac{\pi k}{2} - j\sin\frac{\pi k}{2}\right) + 3\left(\cos\pi k - j\sin\pi k\right) + 4\left(\cos\frac{3\pi k}{2} - j\sin\frac{3\pi k}{2}\right)$$

$$= 1 + 2\cos\frac{\pi k}{2} + 3\cos\pi k + 4\cos\frac{3\pi k}{2} - j\left(2\sin\frac{\pi k}{2} + 3\sin\pi k + 4\sin\frac{3\pi k}{2}\right)$$

$$X(0) = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$$X(1) = 1 + 2\cos\frac{\pi}{2} + 3\cos\pi + 4\cos\frac{3\pi}{2} - j\left(2\sin\frac{\pi}{2} + 3\sin\pi + 4\sin\frac{3\pi}{2}\right) = 1 - 3 - j(2 - 4) = -2 + 2j$$

$$X(2) = 1 + 2\cos\pi + 3\cos 2\pi + 4\cos 3\pi - j\left(2\sin\pi + 3\sin 2\pi + 4\sin 3\pi\right) = 1 - 2 + 3 - 4 = -2$$

$$X(3) = 1 + 2\cos\frac{3\pi}{2} + 3\cos 3\pi + 4\cos\frac{9\pi}{2} - j\left(2\sin\frac{3\pi}{2} + 3\sin 3\pi + 4\sin\frac{9\pi}{2}\right) = 1 - 3 - j(-2 + 4) = -2 - 2j$$

DFT-ul în 4 puncte pentru $h(n)$ este: $\mathrm{DFT}\{h(n)\} = H(k) = \sum_{n=0}^{3} h(n) e^{-j\frac{2\pi k}{4}n}, \qquad k = \overline{0,3}$

$$H(k) = 1 - e^{-j\frac{\pi k}{2}} + e^{-j\pi k} - 2e^{-j\frac{3\pi k}{2}} = 1 - \left(\cos\frac{\pi k}{2} - j\sin\frac{\pi k}{2}\right) + \left(\cos\pi k - j\sin\pi k\right) - 2\left(\cos\frac{3\pi k}{2} - j\sin\frac{3\pi k}{2}\right)$$

$$= 1 - \left(\cos\frac{\pi k}{2} - j\sin\frac{\pi k}{2}\right) + \left(\cos\pi k - j\sin\pi k\right) - 2\left(\cos\frac{\pi k}{2} + j\sin\frac{\pi k}{2}\right)$$

$$= 1 - 3\cos\frac{\pi k}{2} + \cos\pi k - j\left(\sin\frac{\pi k}{2} + \sin\pi k\right)$$

$$H(0) = 1 - 3 + 1 = -1$$

$$H(1) = 1 - 3\cos\frac{\pi}{2} + \cos\pi - j\left(\sin\frac{\pi}{2} + \sin\pi\right) = 1 - 1 - j = -j$$

$$H(2) = 1 - 3\cos\pi + \cos 2\pi - j\left(\sin\pi + \sin 2\pi\right) = 1 + 3 + 1 = 5$$

$$H(3) = 1 - 3\cos\frac{3\pi}{2} + \cos 3\pi - j\left(\sin\frac{3\pi}{2} + \sin 3\pi\right) = 1 - 1 + j = j$$

Înmulţind cele două DFT-uri obţinem produsul $Y(k) = X(k)H(k)$ sau echivalent

$$Y(0) = X(0)H(0) = 10\cdot(-1) = -10$$

$$Y(1) = X(1)H(1) = (-2 + 2j)\cdot(-j) = 2 + 2j$$

$$Y(2) = X(2)H(2) = (-2)\cdot 5 = -10$$

$$Y(3) = X(3)H(3) = (-2 - 2j)\cdot j = 2 - 2j$$

Pentru a obţine secvenţa de ieşire $y(n)$, trebuie evaluat IDFT-ul secvenţei $Y(k)$:

$$\mathrm{IDFT}\{Y(k)\} = y(n) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} Y(k) e^{j\frac{2\pi k}{4}n}, \qquad n = \overline{0,3}$$

$$y(n)=\frac{1}{4}\left[-10+(2+2j)e^{j\frac{\pi n}{2}}-10e^{j\pi n}+(2-2j)e^{j\frac{3\pi n}{2}}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[-10+(2+2j)\left(\cos\frac{\pi n}{2}+j\sin\frac{\pi n}{2}\right)-10(\cos\pi n+j\sin\pi n)\right.$$

$$\left.=\frac{1}{4}\left(-10+4\cos\frac{\pi n}{2}-10\cos\pi n-4\sin\frac{\pi n}{2}-10j\sin\pi n\right)+(2-2j)\left(\cos\frac{3\pi n}{2}+j\sin\frac{3\pi n}{2}\right)\right]$$

$$=-\frac{5}{2}+\cos\frac{\pi n}{2}-\frac{5}{2}\cos\pi n-\sin\frac{\pi n}{2}-\frac{5}{2}j\sin\pi n$$

$$y(0)=-\frac{5}{2}+1-\frac{5}{2}=-4$$

$$y(1)=-\frac{5}{2}+\cos\frac{\pi}{2}-\frac{5}{2}\cos\pi-\sin\frac{\pi}{2}-\frac{5}{2}j\sin\pi=-\frac{5}{2}+\frac{5}{2}-1=-1$$

$$y(2)=-\frac{5}{2}+\cos\pi-\frac{5}{2}\cos 2\pi-\sin\pi-\frac{5}{2}j\sin 2\pi=-\frac{5}{2}-1-\frac{5}{2}=-6$$

$$y(3)=-\frac{5}{2}+\cos\frac{3\pi}{2}-\frac{5}{2}\cos 3\pi-\sin\frac{3\pi}{2}-\frac{5}{2}j\sin 3\pi=-\frac{5}{2}+\frac{5}{2}+1=1$$

$$\Rightarrow y(n)=\left\{\underset{\uparrow}{-4},-1,-6,1\right\}.$$

Problema 14 – Evaluarea coeficienților DFT: Se consideră un semnal analogic

$$x_a(t)=\cos(200\pi)-3.5\cos(600\pi t),$$

care este eşantionat cu $F_s=1$ kHz. Se doreşte evaluarea coeficienţilor DFT pentru N egal cu perioada fundamentală.

Rezolvare

În urma eşantionării, obţinem secvenţa:

$$x(n)=\cos\left(2\pi\frac{100}{1000}n\right)-3.5\cos\left(2\pi\frac{300}{1000}n\right)=\cos\left(2\pi\frac{1}{10}n\right)-3.5\cos\left(2\pi\frac{3}{10}n\right)$$

Perioada acestei secvenţe este $N=10$, deci vom evalua DFT-ul în 10 puncte.

Secvenţa $x(n)$ o putem scrie ca sumă de exponenţiale, de forma:

$$x(n)=\frac{e^{j2\pi\frac{1}{10}n}+e^{-j2\pi\frac{1}{10}n}}{2}-3.5\frac{e^{j2\pi\frac{3}{10}n}+e^{-j2\pi\frac{3}{10}n}}{2}=\frac{1}{10}\left(5e^{j2\pi\frac{1}{10}n}+5e^{-j2\pi\frac{1}{10}n}-17.5e^{j2\pi\frac{3}{10}n}-17.5e^{-j2\pi\frac{3}{10}n}\right)$$

$$=\frac{1}{10}\left(5e^{j2\pi\frac{1}{10}n}+5e^{j2\pi\frac{9}{10}n}-17.5e^{j2\pi\frac{3}{10}n}-17.5e^{j2\pi\frac{7}{10}n}\right)$$

iar relaţia dintre secvenţa $x(n)$ şi coeficienţii DFT, $X(k)$, este:

$$x(n)=\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{9}X(k)e^{j2\pi\frac{k}{10}n},\qquad n=\overline{0,9}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}X(0)=X(2)=X(4)=X(5)=X(6)=X(8)=0\\ X(1)=X(9)=5\\ X(3)=X(7)=-17.5\end{cases}$$

Problema 15 – Ieșirea unui filtru cu răspuns finit la impuls: Folosind DFT şi IDFT se doreşte determinarea ieşirii filtrului cu răspuns finit la impuls, caracterizat de răspunsul la impuls: $h(n)=\{\underset{\uparrow}{1},2,3\}$ la intrarea $x(n)=\{\underset{\uparrow}{1},2,3,2\}$.

Rezolvare

Lungimea secvenţei răspuns la impuls este $M=3$, iar lungimea secvenţei de intrare este $L=4$. Dacă am realiza convoluţia liniară am obţine secvenţa de ieşire de lungime $N=L+M-1=6$, ceea ce înseamnă că DFT-urile trebuie evaluate în cel puţin 6 puncte. În practică, metodele numerice folosite în evaluarea DFT-ului impun ca N să fie o putere întreagă a lui 2 (cerinţă impusă de algoritmii FFT de calcul ai DFT-ului). Cea mai mică putere întreagă a lui 2, mai mare sau egală cu 6 este $N=8$.

Vom evalua DFT-ul corespunzător secvenţei de intrare, în 8 puncte:

$$X(k)=\sum_{n=0}^{7}x(n)W_8^{kn},\qquad k=\overline{0,7}$$

$$X(k)=x(0)W_8^{k0}+x(1)W_8^{k1}+x(2)W_8^{k2}+x(3)W_8^{k3}+x(4)W_8^{k4}+x(5)W_8^{k5}+x(6)W_8^{k6}+x(7)W_8^{k7}$$
$$=W_8^0+2W_8^k+3W_8^{2k}+2W_8^{3k}$$

unde ponderile W_N^k au fost evaluate la **Problema 12**.

$$X(k)=1+2e^{-j\frac{\pi}{4}k}+3e^{-j\frac{\pi}{2}k}+2e^{-j\frac{3\pi}{4}k}$$

Evaluând pentru $k=\overline{0,7}$ obţinem succesiv

$$X(0)=1+2+3+2=8$$

$$X(1)=1+2e^{-j\frac{\pi}{4}}+3e^{-j\frac{\pi}{2}}+2e^{-j\frac{3\pi}{4}}=1+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+3(0-j1)+2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1-j\left(2\sqrt{2}+3\right)$$

$$X(2)=1+2e^{-j\frac{\pi}{2}}+3e^{-j\pi}+2e^{-j\frac{3\pi}{2}}=1+2(0-j1)+3(-1-j0)+2(0+j1)=-2$$

$$X(3)=1+2e^{-j\frac{3\pi}{4}}+3e^{-j\frac{3\pi}{2}}+2e^{-j\frac{9\pi}{4}}=1+2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+3(0+j1)+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1-j\left(2\sqrt{2}-3\right)$$

$$X(4)=1+2e^{-j\pi}+3e^{-j2\pi}+2e^{-j3\pi}=1+2(-1-j0)+3(1-j0)+2(-1-j0)=0$$

$$X(5)=1+2e^{-j\frac{5\pi}{4}}+3e^{-j\frac{5\pi}{2}}+2e^{-j\frac{15\pi}{4}}=1+2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+3(0-j1)+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1+j\left(2\sqrt{2}-3\right)$$

$$X(6)=1+2e^{-j\frac{3\pi}{2}}+3e^{-j3\pi}+2e^{-j\frac{9\pi}{2}}=1+2(0+j1)+3(-1-j0)+2(0-j1)=-2$$

$$X(7)=1+2e^{-j\frac{7\pi}{4}}+3e^{-j\frac{7\pi}{2}}+2e^{-j\frac{21\pi}{4}}=1+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+3(0+j1)+2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1+j\left(2\sqrt{2}+3\right)$$

Vom evalua DFT-ul corespunzător secvenţei răspuns la impuls, $h(n)$, în $N=8$ puncte:

$$H(k)=\sum_{n=0}^{7}h(n)W_8^{kn},\qquad k=\overline{0,7}$$
$$=W_8^0+2W_8^k+3W_8^{2k}=1+2e^{-j\frac{\pi}{4}k}+3e^{-j\frac{\pi}{2}k}$$

Evaluând pentru $k=\overline{0,7}$ obţinem succesiv

$$H(0)=6$$

$$H(1)=1+2e^{-j\frac{\pi}{4}}+3e^{-j\frac{\pi}{2}}=1+\sqrt{2}-j\left(3+\sqrt{2}\right)$$

$$H(2)=1+2e^{-j\frac{\pi}{2}}+3e^{-j\pi}=-2-j2$$
$$H(3)=1+2e^{-j\frac{3\pi}{4}}+3e^{-j\frac{3\pi}{2}}=1-\sqrt{2}+j\left(3-\sqrt{2}\right)$$
$$H(4)=1+2e^{-j\pi}+3e^{-j2\pi}=2$$
$$H(5)=1+2e^{-j\frac{5\pi}{4}}+3e^{-j\frac{5\pi}{2}}=1-\sqrt{2}-j\left(3-\sqrt{2}\right)$$
$$H(6)=1+2e^{-j\frac{3\pi}{2}}+3e^{-j3\pi}=-2+j2$$
$$H(7)=1+2e^{-j\frac{7\pi}{4}}+3e^{-j\frac{7\pi}{2}}=1+\sqrt{2}+j\left(3+\sqrt{2}\right)$$

Efectuând produsul $Y(k)=H(k)X(k), \quad k=\overline{0,7}$, obţinem

$$Y(0)=6\cdot 8=48$$
$$Y(1)=\left[1+\sqrt{2}-j\left(3+\sqrt{2}\right)\right]\left[1-j\left(2\sqrt{2}+3\right)\right]=-23.31-j18.49$$
$$Y(2)=(-2-j2)(-2)=4+j4$$
$$Y(3)=\left[1-\sqrt{2}+j\left(3-\sqrt{2}\right)\right]\left[1-j\left(2\sqrt{2}-3\right)\right]=-0.69+j1.51$$
$$Y(4)=0$$
$$Y(5)=\left[1-\sqrt{2}-j\left(3-\sqrt{2}\right)\right]\left[1+j\left(2\sqrt{2}-3\right)\right]=-0.69-j1.51$$
$$Y(6)=(-2+j2)(-2)=4-j4$$
$$Y(7)=\left[1+\sqrt{2}+j\left(3+\sqrt{2}\right)\right]\left[1+j\left(2\sqrt{2}+3\right)\right]=-23.31+j18.49$$

Pentru a obţine secvenţa de ieşire, $y(n)$, se aplică IDFT-ul, secvenţei $Y(k)$:

$$y(n)=\mathrm{IDFT}\{Y(k)\}=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7}Y(k)e^{j\frac{2\pi}{8}kn}, \qquad n=\overline{0,7}$$

$$y(n)=\frac{1}{8}\left[Y(0)+Y(1)e^{j\frac{\pi}{4}n}+Y(2)e^{j\frac{\pi}{2}n}+Y(3)e^{j\frac{3\pi}{4}n}+Y(4)e^{j\pi}+Y(5)e^{j\frac{5\pi}{4}n}+Y(6)e^{j\frac{3\pi}{2}n}+Y(7)e^{j\frac{7\pi}{4}n}\right]$$

$$=6-(2.91+j2.31)\left(\cos\frac{\pi n}{4}+j\sin\frac{\pi n}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}\right)\left(\cos\frac{\pi n}{2}+j\sin\frac{\pi n}{2}\right)$$
$$-(0.09-j0.19)\left(\cos\frac{3\pi n}{4}+j\sin\frac{3\pi n}{4}\right)+0-(0.09+j0.19)\left(\cos\frac{5\pi n}{4}+j\sin\frac{5\pi n}{4}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{2}-j\frac{1}{2}\right)\left(\cos\frac{3\pi n}{2}+j\sin\frac{3\pi n}{2}\right)-(2.91-j2.31)\left(\cos\frac{7\pi n}{4}+j\sin\frac{7\pi n}{4}\right)$$
$$\overset{\substack{\cos x=\cos(x\pm 2\pi)\\ \sin x=\sin(x\pm 2\pi)}}{=}\ 6-2.91\cdot 2\cos\frac{\pi n}{4}+0.5\cdot 2\left(\cos\frac{\pi n}{2}-\sin\frac{\pi n}{2}\right)-0.09\cdot 2\cos\frac{3\pi n}{4}+2.31\cdot 2\sin\frac{\pi n}{4}$$
$$-0.19\cdot 2\sin\frac{3\pi n}{4}$$
$$=6-5.82\cos\frac{\pi n}{4}+\cos\frac{\pi n}{2}-\sin\frac{\pi n}{2}-0.18\cos\frac{3\pi n}{4}+4.62\sin\frac{\pi n}{4}-0.38\sin\frac{3\pi n}{4}$$

Evaluând pentru $n=\overline{0,7}$ obţinem succesiv

$$y(0)=6-2.91+\frac{1}{2}-0.09-0.09+\frac{1}{2}-2.91+j\left(-2.31+\frac{1}{2}+0.19-0.19-\frac{1}{2}+2.31\right)=1$$

$$y(1)=6-5.82\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}-0.18\cos\frac{3\pi}{4}+4.62\sin\frac{\pi}{4}-0.38\sin\frac{3\pi}{4}$$
$$=6-5.82\frac{\sqrt{2}}{2}-1+0.18\frac{\sqrt{2}}{2}+4.62\frac{\sqrt{2}}{2}-0.38\frac{\sqrt{2}}{2}=5-0.7\sqrt{2}\approx 4$$

$$y(2)=6-5.82\cos\frac{\pi}{2}+\cos\pi-\sin\pi-0.18\cos\frac{3\pi}{2}+4.62\sin\frac{\pi}{2}-0.38\sin\frac{3\pi}{2}=6-1+4.62+0.38=10$$

$$y(3)=6-5.82\cos\frac{3\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{2}-\sin\frac{3\pi}{2}-0.18\cos\frac{9\pi}{4}+4.62\sin\frac{3\pi}{4}-0.38\sin\frac{9\pi}{4}$$
$$=6+5.82\frac{\sqrt{2}}{2}+1-0.18\frac{\sqrt{2}}{2}+4.62\frac{\sqrt{2}}{2}-0.38\frac{\sqrt{2}}{2}=7+4.94\sqrt{2}\approx 14$$

$$y(4)=6-5.82\cos\pi+\cos 2\pi-\sin 2\pi-0.18\cos 3\pi+4.62\sin\pi-0.38\sin 3\pi=6+5.82+1+0.18=13$$

$$y(5)=6-5.82\cos\frac{5\pi}{4}+\cos\frac{5\pi}{2}-\sin\frac{5\pi}{2}-0.18\cos\frac{15\pi}{4}+4.62\sin\frac{5\pi}{4}-0.38\sin\frac{15\pi}{4}$$
$$=6+5.82\frac{\sqrt{2}}{2}-1-0.18\frac{\sqrt{2}}{2}-4.62\frac{\sqrt{2}}{2}+0.38\frac{\sqrt{2}}{2}=5+0.7\sqrt{2}\approx 6$$

$$y(6)=6-5.82\cos\frac{3\pi}{2}+\cos 3\pi-\sin 3\pi-0.18\cos\frac{9\pi}{2}+4.62\sin\frac{3\pi}{2}-0.38\sin\frac{9\pi}{2}$$
$$=6-1-4.62-0.38=0$$

$$y(7)=6-5.82\cos\frac{7\pi}{4}+\cos\frac{7\pi}{2}-\sin\frac{7\pi}{2}-0.18\cos\frac{21\pi}{4}+4.62\sin\frac{7\pi}{4}-0.38\sin\frac{21\pi}{4}$$
$$=6-5.82\frac{\sqrt{2}}{2}+1-0.18\frac{\sqrt{2}}{2}-4.62\frac{\sqrt{2}}{2}+0.38\frac{\sqrt{2}}{2}=7-5.12\sqrt{2}\approx 0$$

În concluzie, ieşirea filtrului cu răspuns finit la impuls este:

$$y(n)=\{\underset{\uparrow}{1},4,10,14,13,6,0,0\}.$$

Deşi multiplicarea a două DFT-uri corespunde convoluţiei circulare în domeniul timp, se observă că prin completarea secvenţelor $x(n)$ şi $h(n)$ cu un număr suficient de zerouri, convoluţia circulară conduce la acelaşi rezultat ca şi convoluţia liniară.

Dacă în exemplul anterior se efectuează convoluţia circulară dintre

$$h(n)=\{\underset{\uparrow}{1},2,3,0,0,0\} \text{ şi } x(n)=\{\underset{\uparrow}{1},2,3,2,0,0\},$$

se obţine

$$y(n)=\sum_{k=0}^{5}h(k)\,x\big((n-k)\big)_6$$

Evaluând pentru $n=\overline{0,5}$ obţinem succesiv

$$y(0)=\sum_{k=0}^{5}x(k)\,h\big((-k)\big)_6=1\cdot 1=1$$

$$y(1)=\sum_{k=0}^{5}x(k)\,h\big((1-k)\big)_6=1\cdot 2+2\cdot 1=4$$

$$y(2)=\sum_{k=0}^{5}x(k)\,h\big((2-k)\big)_6=1\cdot 3+2\cdot 2+3\cdot 1=10$$

$$y(3)=\sum_{k=0}^{5}x(k)h\big((3-k)\big)_6=2\cdot 3+3\cdot 2+2\cdot 1=14$$

$$y(4)=\sum_{k=0}^{5}x(k)h\big((4-k)\big)_6=3\cdot 3+2\cdot 2=13$$

$$y(5)=\sum_{k=0}^{5}x(k)h\big((5-k)\big)_6=2\cdot 3=6$$

$$\Rightarrow y(n)=\Big\{\underset{\uparrow}{1},4,10,14,13,6\Big\}.$$

Dacă $N\geq M+L-1$, nu apare suprapunere (eroare alias) în domeniul timp, în caz contrar, secvenţa rezultată va conţine suprapuneri ale unor eșantioane.

Problema 16 – Ieșirea unui filtru FIR, interferență componente: Acest exemplu îşi propune evaluarea DFT-ului într-un mod oarecum deficitar, pentru a se observa apariţia interferenţei componentelor. Se va repeta **Problema 15**, pentru $N=4$.

Rezolvare

Vom evalua DFT-ul corespunzător secvenţei răspuns la impuls în $N=4$ puncte:

$$H(k)=\sum_{n=0}^{3}h(n)W_4^{kn}W_4^0+2W_4^k+3W_4^{2k}=1+2e^{-j\frac{\pi}{2}k}+3e^{-j\pi k},\qquad k=\overline{0,3}$$

Evaluând pentru $k=\overline{0,3}$ obţinem succesiv

$$H(0)=1+2+3=6$$

$$H(1)=1+2e^{-j\frac{\pi}{2}}+3e^{-j\pi}=1-j2-3=-2-j2$$

$$H(2)=1+2e^{-j\pi}+3e^{-j2\pi}=1-2+3=2$$

$$H(3)=1+2e^{-j\frac{3\pi}{2}}+3e^{-j3\pi}=1+j2-3=-2+j2$$

Vom evalua DFT-ul corespunzător secvenţei de intare, $x(n)$, în $N=4$ puncte.

$$X(k)=\sum_{n=0}^{3}x(n)W_4^{kn},\qquad k=\overline{0,3}$$

$$=W_4^0+2W_4^k+3W_4^{2k}+2W_4^{3k}=1+2e^{-j\frac{\pi}{2}k}+3e^{-j\pi k}+2e^{-j\frac{3\pi}{2}k}$$

Evaluând pentru $k=\overline{0,3}$ obţinem succesiv

$$X(0)=1+2+3+2=8$$

$$X(1)=1+2e^{-j\frac{\pi}{2}}+3e^{-j\pi k}+2e^{-j\frac{3\pi}{2}}=1-j2-3+j2=-2$$

$$X(2)=1+2e^{-j\pi}+3e^{-j2\pi}+2e^{-j3\pi}=1-2+3-2=0$$

$$X(3)=1+2e^{-j\frac{3\pi}{2}}+3e^{-j3\pi}+2e^{-j\frac{9\pi}{2}k}=1+j2-3-j2=-2$$

Efectuând produsul $\hat{Y}(k)=H(k)X(k),\quad k=\overline{0,3}$, obţinem

$$\hat{Y}(0)=6\cdot 8=48$$

$$\hat{Y}(1)=(-2-j2)(-2)=4+j4$$

$$\hat{Y}(2)=2\cdot 0=0$$

$$\hat{Y}(3)=(-2+j2)(-2)=4-j4$$

Pentru a obţine secvenţa de ieşire $\hat{y}(n)$ se aplică IDFT-ul secvenţei $\hat{Y}(k)$ şi se ţine cont de faptul că $\cos x = \cos(x \pm 2\pi)$, $\sin x = \sin(x \pm 2\pi)$

$$\hat{y}(n) = \text{IDFT}\left\{\hat{Y}(k)\right\} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3}\hat{Y}(k)e^{j\frac{2\pi}{4}kn}, \qquad n = \overline{0,3}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\hat{Y}(0) + \hat{Y}(1)e^{j\frac{\pi}{2}n} + \hat{Y}(2)e^{j\pi n} + \hat{Y}(3)e^{j\frac{3\pi}{2}n}\right] = \frac{1}{4}\left[48 + (4+j4)e^{j\frac{\pi}{2}n} + 0e^{j\pi n} + (4-j4)e^{j\frac{3\pi}{2}n}\right]$$

$$= 12 + (1+j)\left(\cos\frac{\pi n}{2} + j\sin\frac{\pi n}{2}\right) + (1-j)\left(\cos\frac{3\pi n}{2} + j\sin\frac{3\pi n}{2}\right)$$

$$= 12 + (1+j)\left(\cos\frac{\pi n}{2} + j\sin\frac{\pi n}{2}\right) + (1-j)\left(\cos\frac{\pi n}{2} - j\sin\frac{\pi n}{2}\right) = 12 + 2\cos\frac{\pi n}{2} - 2\sin\frac{\pi n}{2}$$

Evaluând pentru $n = \overline{0,7}$ obţinem succesiv

$$\hat{y}(0) = 12 + 2 = 14$$

$$\hat{y}(1) = 12 + 2\cos\frac{\pi}{2} - 2\sin\frac{\pi}{2} = 12 - 2 = 10$$

$$\hat{y}(2) = 12 + 2\cos\pi - 2\sin\pi = 12 - 2 = 10$$

$$\hat{y}(3) = 12 + 2\cos\frac{3\pi}{2} - 2\sin\frac{3\pi}{2} = 12 + 2 = 14$$

$$\Rightarrow \hat{y}(n) = \left\{\underset{\uparrow}{14}, 10, 10, 14\right\}.$$

Dacă se efectuează convoluţia circulară dintre

$$h(n) = \left\{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 0\right\} \text{ şi } x(n) = \left\{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 2\right\},$$

se obţine

$$\hat{y}(n) = \sum_{k=0}^{3} h(k)x\big((n-k)\big)_4$$

Evaluând pentru $n = \overline{0,3}$ obţinem succesiv

$$\hat{y}(0) = \sum_{k=0}^{3} x(k)h\big((-k)\big)_6 = 1\cdot1 + 3\cdot3 + 2\cdot2 = 14$$

$$\hat{y}(1) = \sum_{k=0}^{3} x(k)h\big((1-k)\big)_6 = 1\cdot2 + 2\cdot1 + 2\cdot3 = 10$$

$$\hat{y}(2) = \sum_{k=0}^{5} x(k)h\big((2-k)\big)_6 = 1\cdot3 + 3\cdot1 + 2\cdot2 = 10$$

$$\hat{y}(3) = \sum_{k=0}^{5} x(k)h\big((3-k)\big)_6 = 2\cdot1 + 3\cdot2 + 2\cdot3 = 14$$

$$\Rightarrow \hat{y}(n) = \left\{\underset{\uparrow}{14}, 10, 10, 14\right\}$$

Dacă se compară rezultatul $\hat{y}(n)$ obţinut prin folosirea DFT-ului şi IDFT-ului în 4 puncte cu $y(n)$ obţinut prin DFT şi IDFT în 8 puncte, se observă diferenţe datorită suprapunerilor sau interferenţei componentelor.

$$\hat{y}(0) = y(0) + y(4) = 1 + 13 = 14$$

$$\hat{y}(1) = y(1) + y(5) = 4 + 6 = 10$$

$$\hat{y}(2) = y(2) + y(6) = 10 + 0 = 10$$

$$\hat{y}(3) = y(3) + y(7) = 14 + 0 = 14$$

Se observă că numai primele două componente sunt afectate de eroarea alias, adică $\min\{L, M\} - 1$ componente.

Problema 17 – Evaluarea spectru: Se doreşte evidenţierea procedurii de evaluare a spectrului unui semnal analogic şi a spectrului secvenţei discrete obţinute prin eşantionarea uniformă a semnalului analogic.

Considerăm semnalul analogic: $x_a(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0$.

Rezolvare

Spectrul semnalului analogic este:

$$X_a(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j2\pi Ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-j2\pi Ft} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-j2\pi Ft} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at} e^{-j2\pi Ft} dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-at} e^{j2\pi Ft} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at} e^{-j2\pi Ft} dt = \frac{1}{a - j2\pi F} + \frac{1}{a + j2\pi F} = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 F^2}$$

Presupunând că semnalul analogic este eşantionat cu frecvenţa $F_s = 1/T$, obţinem secvenţa discretă:

$$x(n) = x_a(nT) = e^{-aT|n|} = \left(e^{-aT}\right)^{|n|}.$$

Spectrul semnalului discret obţinut prin eşantionare este:

$$X\left(\frac{F}{F_s}\right) = X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j2\pi fn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(e^{-aT}\right)^{|n|} e^{-j2\pi fn}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(e^{-aT}\right)^{-n} e^{-j2\pi fn} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-aT}\right)^{n} e^{-j2\pi fn} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-aT}\right)^{n} e^{j2\pi fn} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-aT}\right)^{n} e^{-j2\pi fn}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-aT}\right)^{n} e^{j2\pi fn} - 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-aT}\right)^{n} e^{-j2\pi fn}$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-aT} e^{j2\pi f}} - 1 + \frac{1}{1 - e^{-aT} e^{-j2\pi f}} = \frac{1 - e^{-2aT}}{1 - 2e^{-aT}\cos(2\pi f) + e^{-2aT}}$$

Spectrul secvenţei $x(n)$ este periodic cu perioada F_s, datorită termenului $\cos\left[(2\pi F)/F_s\right]$.

Spectrul $X_a(F)$ fiind de bandă limitată, eroarea de alias nu mai poate fi evitată. Conform relaţiei (3.50)

$$X(f) = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F - kF_s),$$

spectrul semnalului reconstituit $\tilde{x}_a(t)$ este:

$$\tilde{X}_a(F) = \begin{cases} \dfrac{1}{F_s} \dfrac{1 - e^{-2aT}}{1 - 2e^{-aT}\cos\dfrac{2\pi F}{F_s} + e^{-2aT}} = \dfrac{T\left(1 - e^{-2aT}\right)}{1 - 2e^{-aT}\cos(2\pi FT) + e^{-2aT}}, & |F| \le \dfrac{F_s}{2} = \dfrac{1}{2T} \\ 0, & |F| > \dfrac{F_s}{2} = \dfrac{1}{2T} \end{cases}$$

Comparând spectrul semnalului neeşantionat cu cel al semnalului reconstituit, se observă că acestea pot diferi semnificativ pentru o frecvenţă de eşantionare aleasă necorespunzător.

Dacă în relaţia corespunzătoare spectrului semnalului reconstituit considerăm T suficient de mic, astfel încât $|2aT| \ll 1$, numărătorul şi numitorul pot fi descompuse în puteri ale lui T, până la ordinul doi. Pentru $|F| \le 1/2T$ şi $|x| \ll 1$ folosind aproximaţiile:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \text{ şi } \cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$$

obţinem

$$X_a(F) = \frac{T\left(1-e^{-2aT}\right)}{1-2e^{-aT}\cos(2\pi FT)+e^{-2aT}} \approx \frac{T\left[1-\left(1-2aT+2a^2T^2\right)\right]}{1-2\left(1-aT+\frac{1}{2}a^2T^2\right)\left(1-2\pi^2F^2T^2\right)+\left(1-2aT+2a^2T^2\right)}$$

$$= \frac{2aT^2-2a^2T^3}{a^2T^2+4\pi^2F^2T^2-4a\pi^2F^2T^3+2\pi^2a^2F^2T^4}$$

Dacă neglijăm termenii care conţin puteri ale lui T mai mari ca doi, avem:

$$X_a(F) \approx \frac{2aT^2}{a^2T^2+4\pi^2F^2T^2} = \frac{2a}{a^2+4\pi^2F^2}$$

Pentru acest caz particular, spectrul semnalului reconstituit se apropie de spectrul semnalului analogic de bandă nelimitată, dacă frecvenţa de eşantionare creşte suficient de mult.

Lăcrimioara GRAMA, Alin GRAMA, Corneliu RUSU, *Filtre numerice – aplicații și probleme*, Ed. U.T.PRESS, Cluj-Napoca, 2008.

Capitolul 1 – Filtrări selective

Problema 1 – Proiectarea unui FTJ ideal aproximat prin trunchiere: Se doreşte proiectarea unui FTS cu răspuns infinit la impuls, de ordinul întâi, cu frecvenţa de tăiere (la 3 dB) egală cu 0.7π (pulsaţia).

Rezolvare

Funcţia de transfer pentru FTS de ordinul întâi este dată de (1.12):

$$H_{TS}(z) = \frac{1-a}{2}\frac{1-z^{-1}}{1+az^{-1}}, \qquad a = \frac{1-\sin\omega_c}{\cos\omega_c}.$$

Pentru a evalua funcţia de transfer, trebuie evaluat în prealabil parametrul a:

$$\sin 0.7\pi = 0.809, \qquad \cos 0.7\pi = -0.588$$

$$\Rightarrow a = \frac{1-0.809}{-0.5878} = -0.325$$

În consecinţă, funcţia de transfer corespunzătoare FTS de ordinul întâi este:

$$H_{TS}(z) = \frac{1+0.325}{2}\frac{1-z^{-1}}{1-0.325z^{-1}} = 0.6625\frac{1-z^{-1}}{1-0.325z^{-1}}$$

Problema 2 – Proiectarea unui FTB: Acest exemplu urmăreşte proiectarea unui FTB, cu răspuns infinit la impuls, de ordinul al doilea, cu lăţimea de bandă egală cu 0.2π şi frecvenţa centrală 0.6π.

Rezolvare

Funcţia de transfer pentru FTB de ordinul doi este dată de relaţia:

$$H_{TB}(z)=\frac{1-a}{2}\frac{1-z^{-2}}{1-b(1+a)z^{-1}+az^{-2}},$$

unde constantele a şi b se evaluează în funcţie de frecvenţa centrală şi de lăţimea de bandă a filtrului:

$$\omega_0=\arccos b,\qquad B=\arccos\left(\frac{2a}{1+a^2}\right).$$

Pentru filtrul considerat frecvenţa centrală este 0.6π, ca atare $b=\cos 0.6\pi=-0.309$, iar banda este 0.2π, adică:

$$\frac{2a}{1+a^2}=\cos 0.2\pi=0.809.$$

Pe a îl aflăm rezolvând ecuaţia de ordinul doi

$$0.809a^2-2a+0.809=0\Leftrightarrow a_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-2.617924}}{1.618}=\frac{2\pm1.1756}{1.618}\Rightarrow\begin{cases}a_1=0.51\\ a_2=1.963\end{cases}$$

Funcţiile de transfer corespunzătoare FTB de ordinul al doilea sunt:

$$H_{1TB}(z)=\frac{1-0.51}{2}\frac{1-z^{-2}}{1+0.309(1+0.51)z^{-1}+0.51z^{-2}}=0.245\frac{1-z^{-2}}{1+0.4666z^{-1}+0.51z^{-2}},$$

$$H_{2TB}(z)=\frac{1-1.963}{2}\frac{1-z^{-2}}{1+0.309(1+1.963)z^{-1}+1.963z^{-2}}=-0.4815\frac{1-z^{-2}}{1+0.9156z^{-1}+1.963z^{-2}}$$

Pentru ambele funcţii de transfer avem zerourile: $z_{1,2}=\pm1$.

Polii funcţiei $H_{1TB}(z)$ sunt $p_{1,2}=\dfrac{-0.4666\pm\sqrt{0.2177-2.04}}{2}=-0.2333\pm j0.675$, iar modulul lor este 0.714, ceea ce ne indică faptul că sunt în interiorul cercului unitate. Ca atare, acest sistem este BIBO stabil.

Polii fucţiei $H_{2TB}(z)$ sunt $p_{3,4}=\dfrac{-0.9156\pm\sqrt{0.8383-7.852}}{2}=-0.4578\pm j1.324$, iar modulul lor este 1.4, ceea ce ne indică faptul că sunt în afara cercului unitate. Ca atare, această funcţie nu este stabilă.

Problema 3 – Evaluarea funcţiei de sistem: Se urmăreşte evaluarea funcţiei de sistem pentru un filtru cu răspuns finit la impuls, de fază liniară, cu coeficienţi reali, căruia i se cunoaşte ordinul şi localizarea câtorva dintre zerouri.

Considerăm un filtru cu răspuns finit la impuls de fază liniară, cu coeficienţi reali, $M=8$, cu zerourile localizate astfel: $z_1=-0.5$, $\quad z_2=0.3+j0.5$, $\quad z_3=-\dfrac{1}{2}+j\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Rezolvare

Pentru determinarea funcţiei de sistem, iniţial trebuie localizate celelalte cinci zerouri. Deoarece ordinul filtrului cu răspuns finit la impuls este $M=8$, trebuie să avem 8 zerouri. Zeroul real $z_1=-0.5$ determină existenţa încă a unui zero real, reciprocul său: $z_4=\dfrac{1}{z_1}=\dfrac{1}{-0.5}=-2$.

Zeroul complex $z_2 = 0.3 + j0.5$, aflându-se în interiorul cercului unitate ($|z_2| = 0.583$), determină existenţa zeroului complex-conjugat: $z_5 = z_2^* = 0.3 - j0.5$ precum şi a zerourilor reciproce:

$$z_6 = \frac{1}{z_5} = \frac{1}{0.3 - j0.5} = \frac{0.3 + j0.5}{(0.3 - j0.5)(0.3 + j0.5)} = \frac{0.3 + j0.5}{0.3^2 + 0.5^2} = \frac{0.3}{0.34} + j\frac{0.5}{0.34} = 0.88 + j1.47$$

$$z_7 = z_6^* = 0.88 - j1.47$$

Zeroul complex $z_3 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$, aflându-se pe cercul unitate ($|z_3| = 1$), determină existenţa zeroului complex-conjugat: $z_8 = z_3^* = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$

Funcţia de transfer corespunzătoare acestor zerouri va fi:

$$H(z) = \prod_{k=1}^{M=8}\left(1 - z_k z^{-1}\right) = 1 + 1.1353z^{-1} + 0.5635z^{-2} + 5.6841z^{-3} + 4.9771z^{-4} + 5.6841z^{-5}$$
$$+0.5635z^{-6} + 1.1353z^{-7} + z^{-8}$$

Problema 4 – FTJ cu 2 poli: Considerând un FTJ cu doi poli, caracterizat de funcţia de sistem: $H(z) = \frac{b_0}{\left(1 - pz^{-1}\right)^2}$, se doreşte determinarea valorile parametrilor b_0 şi p, astfel încât răspunsul în frecvenţă, $H(\omega)$, să satisfacă condiţiile: $H(0) = 1$ şi $\left|H\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|^2 = \frac{1}{2}$.

Rezolvare

Răspunsul în frecvenţă corespunzător acestui FTJ este:

$$H(\omega) = \frac{b_0}{\left(1 - pe^{-j\omega}\right)^2}.$$

La frecvenţa $\omega = 0$, avem: $H(0) = \frac{b_0}{(1-p)^2} = 1 \Leftrightarrow b_0 = (1-p)^2$.

La frecvenţa $\omega = \pi/4$, avem:

$$H\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{b_0}{\left(1 - pe^{-j\frac{\pi}{4}}\right)^2} = \frac{(1-p)^2}{\left[1 - p\left(\cos\frac{\pi}{4} - j\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^2} = \frac{(1-p)^2}{\left[\left(1 - p\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + jp\frac{\sqrt{2}}{2}\right]^2}.$$

Deci

$$\left|H\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|^2 = \left[\frac{(1-p)^2}{\left(1 - p\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(p\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\right]^2 = \frac{(1-p)^4}{\left(1 - p\sqrt{2} + p^2\right)^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(1-p)^4 = \left(1 - p\sqrt{2} + p^2\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}(1-p)^2 = 1 - p\sqrt{2} + p^2 \Leftrightarrow p^2 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}p + 1 = 0 \Leftrightarrow p_{1,2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \pm \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right)^2 - 4}}{2}$$

Valoarea $p = 0.31$ satisface această ecuaţie. În consecinţă, funcţia de sistem corespunzătoare filtrului dorit este:

$$H(z)=\frac{0.48}{\left(1-0.31z^{-1}\right)^2}.$$

Problema 5 – FTB: Se urmăreşte proiectarea unui FTB, cu frecvenţa centrală la $\omega=\pi/2$ şi cu caracteristica răspunsului în frecvenţă de valoare nulă la $\omega=0$ şi $\omega=\pi$. Valoarea modulului răspunsului în frecvenţă este $1/\sqrt{2}$ la $\omega=4\pi/9$.

Rezolvare

Deoarece frecvenţa centrală este $\omega=\pi/2$, filtrul va avea polii: $p_{1,2}=re^{\pm j\frac{\pi}{2}}$.

Caracteristica răspunsului în frecvenţă are valoare nulă la $\omega=0$ şi $\omega=\pi$, deci zerourile vor fi: $z_1=e^{-j0}=1$ şi $z_2=e^{-j\pi}=-1$.

În consecinţă, funcţia de sistem este:

$$H(z)=G\frac{\left(1-z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}\right)}{\left(1-jrz^{-1}\right)\left(1+jrz^{-1}\right)}=G\frac{1-z^{-2}}{1+r^2z^{-2}}.$$

Factorul de câştig, G, se determină evaluând răspunsul în frecvenţă al filtrului, $H(\omega)$, la $\omega=\pi/2$, adică:

$$H\left(\frac{\pi}{2}\right)=G\frac{1-e^{-2j\frac{\pi}{2}}}{1+r^2e^{-2j\frac{\pi}{2}}}=G\frac{2}{1-r^2}=1\Rightarrow G=\frac{1-r^2}{2}.$$

Valoarea lui r se determină evaluând răspunsul în frecvenţă, $H(\omega)$, la $\omega=4\pi/9$, adică:

$$\left|H\left(\frac{4\pi}{9}\right)\right|^2=\left(\frac{1-r^2}{2}\left|\frac{1-e^{-2j\frac{4\pi}{9}}}{1+r^2e^{-2j\frac{4\pi}{9}}}\right|\right)^2=\frac{\left(1-r^2\right)^2}{4}\left|\frac{1-\cos\frac{8\pi}{9}+j\sin\frac{8\pi}{9}}{1+r^2\cos\frac{8\pi}{9}-jr^2\sin\frac{8\pi}{9}}\right|^2$$

$$=\frac{\left(1-r^2\right)^2}{4}\frac{\left(1-\cos\frac{8\pi}{9}\right)^2+\sin^2\frac{8\pi}{9}}{\left(1+r^2\cos\frac{8\pi}{9}\right)^2+r^4\sin^2\frac{8\pi}{9}}=\frac{\left(1-r^2\right)^2}{4}\frac{2-2\cos\frac{8\pi}{9}(\;)}{1+2r^2\cos\frac{8\pi}{9}+r^4}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\left(1-r^2\right)^2\left(2-2\cos\frac{8\pi}{9}\right)=2\left(1+2r^2\cos\frac{8\pi}{9}+r^4\right)\Leftrightarrow r^4-2.13r^2+1=0$$

$$\Leftrightarrow r_{1,2}^2=\frac{2.13\pm\sqrt{4.5369-4}}{2}=1.065\pm0.37$$

r^2 trebuie să aibă o valoare subunitară, ca atare soluţia aleasă este $r^2=0.69$, de unde valoarea câştigului este $G=0.155$.

Funcţia de sistem corespunzătoare FTB proiectat este:

$$H(z)=0.155\frac{1-z^{-2}}{1+0.69z^{-2}}.$$

Problema 6 – Filtru de rejecţie obţinut din FTS: Acest exemplu ilustrează convertirea unui FTS într-un filtru de rejecţie. Se consideră un FTS cu funcţia de sistem: $H(z)=\dfrac{1-z^{-1}}{1-az^{-1}}, \quad a<1$, şi se doreşte obţinerea unui filtru de rejecţie, ce rejectează frecvenţa $\omega_0=\pi/4$ şi armonicele corepunzătoare.

Pentru filtrul de rejecţie se vor determina ecuaţia cu diferenţe finite şi coeficienţi constanţi şi diagrama poli-zerouri.

Rezolvare

Frecvenţele ce trebuie rejectate sunt: $\omega=\left\{0,\pm\dfrac{\pi}{4},\pm\dfrac{\pi}{2},\pm\dfrac{3\pi}{4},\pi\right\}$, ca atare funcţia de transfer va fi de ordin 8 (trebuie să aibă 8 zerouri):

$$H(z)=\frac{1-z^{-8}}{1-az^{-8}}=\frac{Y(z)}{X(z)}$$

Ecuaţia cu diferenţe finite corespunzătoare este:

$$y(n)=ay(n-8)+x(n)-x(n-8)$$

Funcţia de sistem corespunzătoare filtrului de rejecţie are zerouri la $z=\left\{1,e^{\pm j\frac{\pi}{4}},e^{\pm j\frac{\pi}{2}},e^{\pm j\frac{3\pi}{4}},-1\right\}$ şi poli la $p=\left\{a^{\frac{1}{8}},a^{\frac{1}{8}}e^{\pm j\frac{\pi}{4}},a^{\frac{1}{8}}e^{\pm j\frac{\pi}{2}},a^{\frac{1}{8}}e^{\pm j\frac{3\pi}{4}},-a^{\frac{1}{8}}\right\}$.

Răspunsul în frecvenţă al filtrului de rejecţie este dat de relaţia

$$H(\omega)=\frac{1-e^{-j8\omega}}{1-ae^{-j8\omega}}=\frac{e^{-j4\omega}\left(e^{j4\omega}-e^{-j4\omega}\right)}{1-a\cos 8\omega+ja\sin 8\omega}=\frac{e^{-j4\omega}2\cos 4\omega}{1-a\cos 8\omega+ja\sin 8\omega}$$

$$\Rightarrow |H(\omega)|=\frac{2|\cos 4\omega|}{\sqrt{1-2a\cos 8\omega+a^2}}$$

$$\Rightarrow \angle H(\omega)=\begin{cases}-\arctan\left(\dfrac{\operatorname{arcsin} 8\omega}{1-\operatorname{arccos} 8\omega}\right), & \cos 4\omega\geq 0\\ \pi-\arctan\left(\dfrac{\operatorname{arcsin} 8\omega}{1-\operatorname{arccos} 8\omega}\right), & \cos 4\omega<0\end{cases}$$

Răspunsul în frecvenţă al FTS este dat de relaţia:

$$H(\omega)=\frac{1-e^{-j\omega}}{1-ae^{-j\omega}}=\frac{e^{-j\frac{\omega}{2}}2\cos\dfrac{\omega}{2}}{1-a\cos\omega+ja\sin\omega}$$

Pentru FTS modulul răspunsului în frecvenţă este:

$$|H(\omega)|=\frac{2\left|\cos\dfrac{\omega}{2}\right|}{\sqrt{1-2a\cos\omega+a^2}},$$

iar faza răspunsului în frecvenţă:

$$\angle H(\omega)=\begin{cases}-\arctan\left(\dfrac{\operatorname{arcsin}\omega}{1-\operatorname{arccos}\omega}\right), & \cos\dfrac{\omega}{2}\geq 0\\ \pi-\arctan\left(\dfrac{\operatorname{arcsin}\omega}{1-\operatorname{arccos}\omega}\right), & \cos\dfrac{\omega}{2}<0\end{cases}$$

Capitolul 2 – Filtre cu răspuns finit la impuls

Problema 7 – Evaluarea răspunsului în frecvență: Se consideră un sistem LTI cu răspunsul la impuls, $h(n)$, real şi lungimea M, pară. Se doreşte determinarea răspunsului în frecvenţă, $H(\omega)$, ştiind că partea reală a răspunsului în frecvenţă este $H_R(\omega)=\dfrac{1-a\cos\omega}{1-2a\cos\omega+a^2}$, $\quad |a|<1$.

Rezolvare

Prima dată evaluăm secvenţa pară $h(n)$, pe care o notăm $h_{par}(n)$. Menţionăm că

$$H_R(\omega)=H_R(z)\big|_{z=e^{j\omega}},$$

unde

$$H_R(z)=\frac{1-a\dfrac{z+z^{-1}}{2}}{1-2a\dfrac{z+z^{-1}}{2}+a^2}=\frac{z^{-1}-a\dfrac{1+z^{-2}}{2}}{z^{-1}-a-az^{-2}+a^2z^{-1}}=\frac{z^{-1}-a\dfrac{1+z^{-2}}{2}}{\left(z^{-1}-a\right)-az^{-1}\left(z^{-1}-a\right)}$$

$$=\frac{z^{-1}-a\dfrac{1+z^{-2}}{2}}{\left(z^{-1}-a\right)\left(1-az^{-1}\right)}=\frac{-\dfrac{1}{a}\left(z^{-1}-a\dfrac{1+z^{-2}}{2}\right)}{\left(1-\dfrac{1}{a}z^{-1}\right)\left(1-az^{-1}\right)}=\frac{\dfrac{1+z^{-2}}{2}-\dfrac{1}{a}z^{-1}}{\left(1-\dfrac{1}{a}z^{-1}\right)\left(1-az^{-1}\right)}$$

Se observă că polii sunt $p_1=a$ şi $p_2=1/a$. Sistemul fiind stabil, cercul unitate este cuprins în regiunea de convergenţă, care va fi un inel circular cuprins între p_1 şi p_2, care conţine cercul unitate. Adică, regiunea de convergenţă (ROC – Region of Convergence) este:

$$\text{ROC:}\qquad |a|<|z|<\frac{1}{|a|}.$$

În consecinţă, $h_{par}(n)$ este o secvenţă bilaterală, în care polul $p_1=a$ determină o parte cauzală, iar polul $p_2=1/a$, o parte necauzală. Aplicând transformata în z inversă lui $H_R(z)$, vom obţine secvenţa $h_{par}(n)$. În prealabil $H_R(z)$ trebuie descompus în fracţii simple:

$$H_R(z)=\frac{A_1}{1-\dfrac{1}{a}z^{-1}}+\frac{A_2}{1-az^{-1}}$$

$$\Rightarrow A_1\big|_{z^{-1}=a}=\left.\frac{\dfrac{1+z^{-2}}{2}-\dfrac{1}{a}z^{-1}}{1-az^{-1}}\right|_{z^{-1}=a}=\frac{\dfrac{1+a^2}{2}-\dfrac{1}{a}a}{1-a\cdot a}=\frac{1+a^2-2}{2\left(1-a^2\right)}=-\frac{1-a^2}{2\left(1-a^2\right)}=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow A_2\big|_{z^{-1}=\frac{1}{a}}=\left.\frac{\dfrac{1+z^{-2}}{2}-\dfrac{1}{a}z^{-1}}{1-\dfrac{1}{a}z^{-1}}\right|_{z^{-1}=\frac{1}{a}}=\frac{\dfrac{1+\frac{1}{a^2}}{2}-\dfrac{1}{a}\dfrac{1}{a}}{1-\dfrac{1}{a}\dfrac{1}{a}}=\frac{\dfrac{a^2+1-2}{a^2}}{2\left(1-\dfrac{1}{a^2}\right)}=\frac{a^2-1}{2\left(a^2-1\right)}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow H_R(z)=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\dfrac{1}{a}z^{-1}}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-az^{-1}}.$$

Partea pară a răspunsului la impuls va fi:

$$h_{par}(n) = Z^{-1}\{H_R(z)\} = -\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{a}\right)^n + \frac{1}{2}a^n = \frac{1}{2}a^{-n} + \frac{1}{2}a^n = \frac{1}{2}a^{|n|} + \frac{1}{2}\delta(n).$$

Răspunsul la impuls în funcţie de partea pară a răspunsului la impuls este:

$$h(n) = 2h_{par}(n)u(n) - h_{par}(0)\delta(n), \qquad n \geq 0.$$

Deci, răspunsul total la impuls este:

$$h(n) = a^n u(n),$$

iar transformata sa Fourier:

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}.$$

Problema 8 – FTJ cu răspuns finit la impuls: Se urmăreşte determinarea funcţiei de sistem, răspunsului în frecvenţă, răspunsului la impuls (simetric) şi ecuaţiei de intare-ieşire corespunzătoare unui FTJ FIR de fază liniară, de lungime 4, al cărui răspuns în frecvenţă satisface condiţiile:

$$H_R(0) = 1 \text{ şi } H_R\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Rezolvare

Fiind vorba despre un filtru FIR, de lungime $M = 4$, funcţia de sistem este:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{3} b_k z^{-k} = \sum_{k=0}^{3} h(k) z^{-k} = h(0) + h(1)z^{-1} + h(2)z^{-2} + h(3)z^{-3}$$

Răspunsul la impuls fiind smetric şi $M = 4$, avem:

$$h(n) = h(M - 1 - n) \Rightarrow \begin{cases} h(0) = h(3) \\ h(1) = h(2) \end{cases}$$

Ca atare, funcţia de sistem poate fi scrisă ca:

$$H(z) = h(0) + h(1)z^{-1} + h(1)z^{-2} + h(0)z^{-3}$$

Ştiind că:

$$H(\omega) = H(z)\big|_{z=e^{j\omega}}$$

răspunsul în frecvenţă este:

$$H(\omega) = h(0) + h(1)e^{-j\omega} + h(1)e^{-2j\omega} + h(0)e^{-3j\omega}$$

Filtrul FIR, fiind de fază liniară:

$$H(\omega) = e^{-j\frac{3\omega}{2}}\left[h(0)e^{j\frac{3\omega}{2}} + h(1)e^{j\frac{\omega}{2}} + h(1)e^{-j\frac{\omega}{2}} + h(0)e^{-j\frac{3\omega}{2}}\right]$$

$$= e^{-j\frac{3\omega}{2}}\left[h(0)\left(e^{j\frac{3\omega}{2}} + e^{-j\frac{3\omega}{2}}\right) + h(1)\left(e^{j\frac{\omega}{2}} + e^{-j\frac{\omega}{2}}\right)\right]$$

$$= e^{-j\frac{3\omega}{2}}\left(2h(0)\cos\frac{3\omega}{2} + 2h(1)\cos\frac{\omega}{2}\right) = 2e^{-j\frac{3\omega}{2}}\left(h(0)\cos\frac{3\omega}{2} + h(1)\cos\frac{\omega}{2}\right)$$

Din

$$H_R(0) = 1 \text{ şi } H_R\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

vom obţine un sistem de două ecuaţii cu două necunoscute, adică:

$$\begin{cases} 2\left(h(0)+h(1)\right)=1 \\ 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}h(0)+\frac{\sqrt{2}}{2}h(1)\right)=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h(0)+h(1)=\frac{1}{2} \\ -h(0)+h(1)=\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h(0)=\frac{1}{2}-h(1) \\ -\frac{1}{2}+h(1)+h(1)=\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h(0)=\frac{1}{2}-h(1) \\ h(1)=\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h(0)=\frac{1}{2}-h(1) \\ h(1)=\frac{1+\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h(0)=\frac{2-\sqrt{2}}{8} \\ h(1)=\frac{2+\sqrt{2}}{8} \end{cases}$$

Funcţia de sistem corespunzătoare filtrului FIR este:

$$H(z)=\frac{2-\sqrt{2}}{8}+\frac{2+\sqrt{2}}{8}z^{-1}+\frac{2+\sqrt{2}}{8}z^{-2}+\frac{2-\sqrt{2}}{8}z^{-3}=\frac{2-\sqrt{2}}{8}\left(1+z^{-3}\right)+\frac{2+\sqrt{2}}{8}\left(z^{-1}+z^{-2}\right)$$

iar răspunsul în frecvenţă

$$H(\omega)=2e^{-j\frac{3\omega}{2}}\left(\frac{2-\sqrt{2}}{8}\cos\frac{3\omega}{2}+\frac{2+\sqrt{2}}{8}\cos\frac{\omega}{2}\right)=\frac{1}{4}e^{-j\frac{3\omega}{2}}\left[\left(2-\sqrt{2}\right)\cos\frac{3\omega}{2}+\left(2+\sqrt{2}\right)\cos\frac{\omega}{2}\right]$$

Dar $H(\omega)=\left|H(\omega)\right|e^{j\angle H(\omega)}$. În consecinţă, modulul răspunsului în frecvenţă este:

$$\left|H(\omega)\right|=\frac{2-\sqrt{2}}{4}\left|\cos\frac{3\omega}{2}\right|+\frac{2+\sqrt{2}}{4}\left|\cos\frac{\omega}{2}\right|$$

iar faza răspunsului în frecvenţă:

$$\angle H(\omega)=\begin{cases} -\frac{3\omega}{2}, & \frac{2-\sqrt{2}}{4}\cos\frac{3\omega}{2}+\frac{2+\sqrt{2}}{4}\cos\frac{\omega}{2}>0 \\ \pi-\frac{3\omega}{2}, & \frac{2-\sqrt{2}}{4}\cos\frac{3\omega}{2}+\frac{2+\sqrt{2}}{4}\cos\frac{\omega}{2}<0 \end{cases}$$

Se poate evalua şi timpul de întărziere de grup:

$$\tau_g(\omega)=-\frac{d\left[\angle H(\omega)\right]}{d\omega}=\frac{3}{2}$$

Pentru filtrele FIR de fază liniară, pentru orice M (par sau impar), timpul de întârziere de grup are valoare constantă:

$$\tau_g(\omega)=-\frac{d\left[\angle H(\omega)\right]}{d\omega}=\alpha=\frac{M-1}{2}$$

Răspunsul la impuls este:

$$h(n)=\left\{\underset{\uparrow}{\frac{2-\sqrt{2}}{8}},\frac{2+\sqrt{2}}{8},\frac{2+\sqrt{2}}{8},\frac{2-\sqrt{2}}{8}\right\}=\left\{\underset{\uparrow}{0.073},0.427,0.427,0.073\right\}$$

iar ecuaţia de intrare-ieşire:

$$y(n)=\frac{2-\sqrt{2}}{8}x(n)+\frac{2+\sqrt{2}}{8}x(n-1)+\frac{2+\sqrt{2}}{8}x(n-2)+\frac{2-\sqrt{2}}{8}x(n-3)$$

$$=\frac{2-\sqrt{2}}{8}\left[x(n)+x(n-3)\right]+\frac{2+\sqrt{2}}{8}\left[x(n-1)+x(n-2)\right]$$

Capitolul 3 – Filtre cu răspuns infinit la impuls

Problema 9 – Obținerea unui filtru digital dintr-unul analogic prin metoda invarianței răspunsului la impuls: Se urmăreşte transformarea unui filtru analogic într-unul digital IIR, folosind metoda invarianţei răspunsului la impuls.

Se consideră un filtru analogic descris prin funcţia de sistem: $H_a(s) = \dfrac{s+0.2}{(s+0.2)^2+9}$.

Rezolvare

Prima dată determinăm zeroul şi polii funcţiei de sistem analogice:

$$s+0.2=0 \Rightarrow \text{zero} \qquad z_1=-0.2$$

$$(s+0.2)^2+9=0 \Leftrightarrow s^2+0.4s+9.04=0$$

$$\Rightarrow p_{1,2} = \frac{-0.4\pm\sqrt{0.16-36.16}}{2} = \frac{-0.4\pm\sqrt{-36}}{2} = \frac{-0.4\pm j6}{2} = -0.2\pm j3$$

$$\Rightarrow \text{polii} \quad \begin{cases} p_1=-0.2-j3 \\ p_2=-0.2+j3 \end{cases}$$

Cei doi poli au valori complex-conjugate.

Pentru proiectarea filtrului IIR nu trebuie determinat răspunsul la impuls $h_a(t)$, ci se determină direct $H(z)$, după ce în prealabil $H_a(s)$ se descompune în fracţii simple, astfel:

$$H_a(s) = \frac{A_1}{s+0.2+j3} + \frac{A_1}{s+0.2-j3}$$

$$\Rightarrow A_1\big|_{s=-0.2-j3} = \left.\frac{s+0.2}{s+0.2-j3}\right|_{s=-0.2-j3} = \frac{-0.2-j3+0.2}{-0.2-j3+0.2-j3} = \frac{-j3}{-j6} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow A_2\big|_{s=-0.2+j3} = \left.\frac{s+0.2}{s+0.2+j3}\right|_{s=-0.2+j3} = \frac{-0.2+j3+0.2}{-0.2+j3+0.2+j3} = \frac{j3}{j6} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow H_a(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s+0.2+j3} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+0.2-j3}$$

Pe baza relaţiilor (3.13)÷(3.15)

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^{N}\frac{c_k}{s-p_k}, \qquad H(z) = \sum_{k=1}^{N}\frac{c_k}{1-e^{p_kT}z^{-1}}$$

$$z_k = e^{p_kT}, \qquad k=\overline{1,N}$$

obţinem funcţia de transfer a filtrului digital, de forma :

$$H(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{-0.2T}e^{-j3T}z^{-1}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{-0.2T}e^{j3T}z^{-1}}$$

Cei doi poli complex-conjugaţi pot fi combinaţi pentru a forma un filtru cu doi poli, cu funcţia de sistem:

$$H(z) = \frac{1}{2}\frac{1-e^{-0.2T}e^{j3T}z^{-1}+1-e^{-0.2T}e^{-j3T}z^{-1}}{\left(1-e^{-0.2T}e^{-j3T}z^{-1}\right)\left(1-e^{-0.2T}e^{j3T}z^{-1}\right)} = \frac{1}{2}\frac{2-e^{-0.2T}z^{-1}\left(e^{j3T}+e^{-j3T}\right)}{1-e^{-0.2T}z^{-1}\left(e^{j3T}+e^{-j3T}\right)+e^{-0.4T}z^{-2}}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2-2e^{-0.2T}z^{-1}\cos 3T}{1-e^{-0.2T}z^{-1}\cos 3T+e^{-0.4T}z^{-2}} = \frac{1-e^{-0.2T}z^{-1}\cos 3T}{1-e^{-0.2T}z^{-1}\cos 3T+e^{-0.4T}z^{-2}}$$

Se observă că eroarea de alias este mai semnificativă la $T=0.5$, decât la $T=0.1$. Odată cu modificarea lui T, frecvenţa de rezonanţă se deplasează; pentru valori mici a lui T, eroarea de alias este micşorată.

Problema 10 – Obţinerea unui filtru digital dintr-unul analogic prin metoda transformării biliniare: Acest exemplu urmăreşte transformarea unui filtru analogic într-unul digital IIR, folosind metoda invarianţei răspunsului la impuls.

Se consideră un filtru analogic descris prin funcţia de sistem: $H_a(s) = \dfrac{s+0.05}{(s+0.05)^2+16}$.

Filtrul digital trebuie să aibă frecvenţa de rezonanţă la $\omega_r = \pi/2$.

Rezolvare

Se observă că frecvenţa de rezonanţă corespunzătoare filtrului analogic este $\Omega_r = 4$. Această frecvenţă analogică trebuie mapată în frecvenţa discretă $\omega_r = \pi/2$, selectând o valoare corespunzătoare pentru parametrul T. Din relaţia (3.22)

$$\Omega_r = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega_r}{2} = \frac{2}{T}\tan\frac{\pi}{4} = \frac{2}{T},$$

rezultă că $T = 1/2$. În concluzie, maparea care trebuie făcută conform relaţiei (3.17) $s = \dfrac{2}{T}\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$, pentru obţinerea filtrului digital este: $s = 4\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$.

Filtrul digital va avea funcţia de sistem:

$$H(z) = \frac{4\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+0.05}{\left(4\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+0.05\right)^2+16} = \frac{4\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+0.05}{16\left(\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2+0.4\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+16.0025}$$

$$= \frac{4\left(1-z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}\right)+0.05\left(1+z^{-1}\right)^2}{16\left(1-z^{-1}\right)^2+0.4\left(1-z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}\right)+16.0025\left(1+z^{-1}\right)^2}$$

$$= \frac{4.05+0.05z^{-1}-3.95z^{-2}}{32.4025+0.005z^{-1}+31.6025z^{-2}} = \frac{0.12499+0.00154z^{-1}-0.1219z^{-2}}{1+0.00015z^{-1}+0.97531z^{-2}}$$

Obsevăm că la numitor, coeficientul lui z^{-1} are o valoare mică (poate fi aproximat cu zero). Funcţia de sistem $H(z)$ va fi în acest caz:

$$H(z) = \frac{0.12499+0.00154z^{-1}-0.1219z^{-2}}{1+0.97531z^{-2}}$$

Polii şi zerourile acestui filtru sunt:

$$p_{1,2} = 0.98758e^{\pm j\frac{\pi}{2}}$$

$$z_1 = -0.99376, \qquad z_2 = 3.99416$$

În acest exemplu, parametrul T a fost ales astfel încât frecvenţa de rezonanţă corespunzătoare filtrului analogic să corespundă cu frecvenţa de rezonanţă a filtrului digital.

De obicei, proiectarea filtrului începe cu specificaţiile în domeniul digital. Aceste specificaţii în frecvenţă sunt transformate în domeniul analogic, prin relaţia (3.22) $\Omega = 2/T\tan(\omega/2)$.

Filtrul analogic este proiectat pentru aceste specificaţii şi convertit într-un filtru digital prin transformarea biliniară (3.17). În această procedură parametrul T dispare din expresia lui $H(z)$, astfel încât poate avea o valoare arbitrară. **Problema 11** ilustrează acest lucru.

Problema 11 – Obținerea unui FTJ digital dintr-unul analogic prin metoda transformării biliniare: Se doreşte proiectare unui FTJ IIR, pornind de la un FTJ analogic, folosind metoda transformării biliniare.

Se urmăreşte proiectarea unui FTJ, cu un singur pol, cu lăţimea de bandă 0.3π la 3 dB, prin transformarea biliniară aplicată filtrului analogic $H_a(s) = \dfrac{\Omega_p}{s+\Omega_p}$, unde Ω_p este lăţimea de bandă a filtrului analogic la 3 dB.

Rezolvare

În domeniul analogic, frecvenţa discretă $\omega_p = 0.3\pi$ corespunde la

$$\Omega_p = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega_p}{2} = \frac{2}{T}\tan\frac{0.3\pi}{2} = \frac{1.02}{T}$$

Funcţia de sistem corespunzătoare filtrului analogic este

$$H_a(s) = \frac{\frac{1.02}{T}}{s + \frac{1.02}{T}}$$

Aplicând transformarea biliniară, rezultă:

$$H(z) = \frac{\frac{1.02}{T}}{\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + \frac{1.02}{T}} = \frac{1.02\left(1+z^{-1}\right)}{3.02 - 0.98z^{-1}} = \frac{0.3377\left(1+z^{-1}\right)}{1-0.3245z^{-1}}$$

Răspunsul în frecvenţă corespunzător filtrului digital este:

$$H(\omega) = \frac{0.3377\left(1+e^{-j\omega}\right)}{1-0.3245e^{-j\omega}}$$

La $\omega = 0$, $H(0) = 1$ şi la $\omega = 0.3\pi$, $\left|H(0.3\pi)\right| = 0.707$ (răspunsul dorit).

Problema 12 – Metoda Padé, parametrii IIR: Acest exemplu urmăreşte evaluarea parametrilor unui filtru IIR pentru care se ştie răspunsul al impuls dorit, $h_d(n)$, folosind metoda Padé.

Se presupune că răspunsul la impuls dorit este: $h_d(n) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$. Se vor determina parametrii filtrului cu funcţia de sistem: $H(z) = \dfrac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$, folosind aproximarea Padé.

Rezolvare

În acest exemplu, $H(z)$ se poate potrivi exact cu $H_d(z)$, selectând parametrii după cum urmează:

$$b_0 = 3, \qquad b_1 = 0, \qquad a_1 = -\frac{1}{3}.$$

Vom aplica acum aproximarea Padé, să vedem dacă într-adevăr obţinem acelaşi rezultat. Considerând la intrarea lui $H(z)$ impulsul unitate, obţinem răspunsul la impuls

$$h(n) = -a_1 h(n-1) + b_0\delta(n) + b_1\delta(n-1)$$

Pentru $n \geq 1$ avem

$$h(n) = -a_1 h(n-1) \Leftrightarrow h_d(n) = -a_1 h_d(n-1)$$

Înlocuind $h_d(n)$ dat iniţial în ultima relaţie, obţinem:

$$3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n\cdot u(n)=-a_1\cdot 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\cdot u(n-1)\Leftrightarrow\frac{1}{3}u(n)=-a_1u(n-1)\Rightarrow a_1=-\frac{1}{3}$$

Pentru a afla constantele b_0 şi b_1 folosim relaţia

$$h(n)=-a_1h(n-1)-a_2h(n-2)-\cdots-a_Nh(n-N)+b_n$$

cu condiţia $h(n)=h_d(n)$. Considerând $n=0$ îl obţinem pe b_0

$$1=\frac{1}{3}\cdot 3\cdot 3+b_0\Rightarrow b_0=3$$

Considerând $n=0$ îl obţinem pe b_1

$$3\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\cdot 3+b_1\Rightarrow b_1=0$$

În concluzie

$$H(z)=H_d(z).$$

Acest exemplu arată că aproximarea Padé are ca rezultat o potrivire perfectă cu $H_d(z)$, când funcţia de sistem dorită este o funcţie raţională şi se cunoaşte numărul de poli şi zerouri din funcţia de sistem.

Acesta lucru nu se întâmplă în general în practică, deoarece $h_d(n)$ se determină din specificaţiile răspunsului dorit în frecvenţă, $H_d(\omega)$. O soluţie de a obţine o aproximare bună a filtrului dorit cu metoda Padé, este de a încerca diverse valori pentru M şi N, până când răspunsul în frecvenţă al filtrului rezultat converge la răspunsul în frecvenţă dorit cu o eroare de aproximare acceptabil de mică.

Problema 13 – Proiectare FTB: Se doreşte proiectarea unui FTB, calat pe frecvenţa $\omega_0=\pi/2$, pentru care: $\left|H\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|=\frac{1}{2}$. Se va determina funcţia de sistem corespunzătoare şi răspunsul la impuls.

Rezolvare

Fiind vorba despre un FTB calat pe frecvenţa ω_0, polii corespunzători sunt:

$$p_{1,2}=re^{\pm j\omega_0}=re^{\pm j\frac{\pi}{2}}=r\left(\cos\frac{\pi}{2}\pm j\sin\frac{\pi}{2}\right)=\pm jr,$$

iar funcţia de transfer este:

$$H(z)=\frac{G}{\left(1-p_1z^{-1}\right)\left(1-p_2z^{-1}\right)}=\frac{G}{\left(1+jrz^{-1}\right)\left(1-jrz^{-1}\right)}=\frac{G}{1+r^2z^{-2}}$$

Vom evalua acum răspunsul în frecvenţă corespunzător FTB:

$$H(\omega)=H(z)\big|_{z=e^{j\omega}}=\frac{G}{1+r^2e^{-j2\omega}}=\frac{G}{1+r^2\left(\cos 2\omega-j\sin 2\omega\right)}$$

Modulul răspunsului în frecvenţă este:

$$|H(\omega)|=\frac{G}{\sqrt{\left(1+r^2\cos 2\omega\right)^2+\left(r^2\sin 2\omega\right)^2}}=\frac{G}{\sqrt{1+2r^2\cos 2\omega+r^4}}$$

Dar

$$\left|H\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|=1 \text{ şi } \left|H\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|=\frac{1}{2},$$

ca atare vom avea un sistem de două ecuaţii cu două necunoscute:

$$\begin{cases}\dfrac{G}{\sqrt{1+2r^2\cos\left(2\dfrac{\pi}{2}\right)+r^4}}=1\\ \dfrac{G}{\sqrt{1+2r^2\cos\left(2\dfrac{\pi}{4}\right)+r^4}}=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{G^2}{1-2r^2+r^4}=1\\ \dfrac{G^2}{1+r^4}=\dfrac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}G^2=\dfrac{1+r^4}{4}\\ \dfrac{1+r^4}{4}=1-2r^2+r^4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}G^2=\dfrac{1+r^4}{4}\\ 3r^4-8r^2+3=0\end{cases}$$

$$3r^4-8r^2+3=0\overset{r^2=t}{\Rightarrow}t_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64-36}}{6}=\frac{4\pm\sqrt{7}}{3}\Rightarrow\begin{cases}t_1=\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}=0.45\Rightarrow r_{1,2}=\pm0.67\\ t_2=\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}=2.22\Rightarrow r_{3,4}=\pm1.49\end{cases}$$

Valoare lui r trebuie să fie pozitivă şi subunitară, aşa că alegem $r=0.67\Rightarrow G=\sqrt{\dfrac{1+r^4}{4}}=0.55$.

Funcţia de transfer este: $H(z)=\dfrac{0.55}{1+0.45z^{-2}}$.

Pentru a obţine răspunsul la impuls, trebuie să despărţim $H(z)$ în fracţii simple:

$$H(z)=\frac{0.275}{1+j0.67z^{-1}}+\frac{0.275}{1-j0.67z^{-1}}$$

$$\Rightarrow h(n)=\left[0.275(-j0.67)^n+0.275(j0.67)^n\right]u(n)=0.275(j0.67)^n\left[(-1)^n+1\right]u(n)$$

Capitolul 4 – Structuri pentru implementarea sistemelor discrete

Problema 14 – Filtru FIR: Acest exemplu urmăreşte descrierea modului de realizare a formei directe şi a celei laticiale pentru un filtru FIR.

Se va realiza implementarea în formă directă şi laticială şi se vor determina ecuaţiile de intrare-ieşire corespunzătoare, pentru filtrul FIR cu funcţia de sistem:

$$H(z)=1+\frac{13}{24}z^{-1}+\frac{5}{8}z^{-2}+\frac{1}{3}z^{-3}.$$

Rezolvare

Funcţia de transfer pentru un filtru FIR este dată de relaţia (4.4), iar răspunsul la impuls al acestuia este identic cu coeficienţii b_k. Pentru filtrul considerat $M=4$; răspunsul la impuls este:

$$h(n)=\left\{\underset{\uparrow}{1},\frac{13}{24},\frac{5}{8},\frac{1}{3}\right\},$$

iar implementarea în formă directă este cea din figura 4.13.

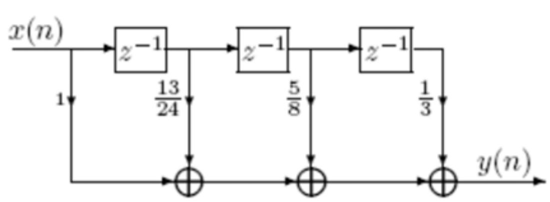


Figura 4.13. Forma directă pentru filtrul FIR $H(z)=1+\frac{13}{24}z^{-1}+\frac{5}{8}z^{-2}+\frac{1}{3}z^{-3}$

Ieşirea filtrului FIR este dată de relaţia (4.6) , adică

$$y(n)=x(n)+\frac{13}{24}x(n-1)+\frac{5}{8}x(n-2)+\frac{1}{3}x(n-3).$$

Pentru implementarea laticială funcţia de transfer a unui filtru FIR este $H(z)=A_{M-1}(z)$, adică

$$H(z)=A_3(z)=1+\frac{13}{24}z^{-1}+\frac{5}{8}z^{-2}+\frac{1}{3}z^{-3}.$$

Se observă că $K_3=\alpha_3(3)=\frac{1}{3}$. Polinomul reciproc al lui $A_3(z)$ este $B_3(z)$, dat de

$$B_3(z)=\frac{1}{3}+\frac{5}{8}z^{-1}+\frac{13}{24}z^{-2}+z^{-3}.$$

Folosind testul de stabilitate Schür-Cohn, dat de relaţia (4.52), pentru $m=3$, obţinem

$$A_2(z)=\frac{A_3(z)-K_3B_3(z)}{1-K_3^2}=\frac{1+\frac{13}{24}z^{-1}+\frac{5}{8}z^{-2}+\frac{1}{3}z^{-3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{5}{8}z^{-1}+\frac{13}{24}z^{-2}+z^{-3}\right)}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$=\frac{1-\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}}+\frac{\frac{13}{24}-\frac{5}{24}}{1-\frac{1}{9}}z^{-1}+\frac{\frac{5}{8}-\frac{13}{72}}{1-\frac{1}{9}}z^{-2}+\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}}z^{-3}=1+\frac{8}{24}\frac{9}{8}z^{-1}+\frac{32}{72}\frac{9}{8}z^{-2}$$

$$\Rightarrow A_2(z)=1+\frac{3}{8}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}.$$

Prin urmare $K_2=\alpha_2(2)=\frac{1}{2}$, iar polinomul reciproc $B_2(z)$ este $B_2(z)=\frac{1}{2}+\frac{3}{8}z^{-1}+z^{-2}$.

Repetând decrementarea recursivă, pentru $m=2$, obţinem:

$$A_1(z)=\frac{A_2(z)-K_2B_2(z)}{1-K_2^2}=\frac{1+\frac{3}{8}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{8}z^{-1}+z^{-2}\right)}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1-\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}+\frac{\frac{3}{8}-\frac{3}{16}}{1-\frac{1}{4}}z^{-1}+\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}z^{-2}=1+\frac{3}{16}\frac{4}{3}z^{-1}$$

$$\Rightarrow A_1(z)=1+\frac{1}{4}z^{-1}.$$

Prin urmare $K_1=\alpha_1(1)=\frac{1}{4}$, iar polinomul reciproc $B_1(z)$ este $B_1(z)=\frac{1}{4}+z^{-1}$.

Implementarea laticială pentru acest filtru FIR este cea din figura 4.14.

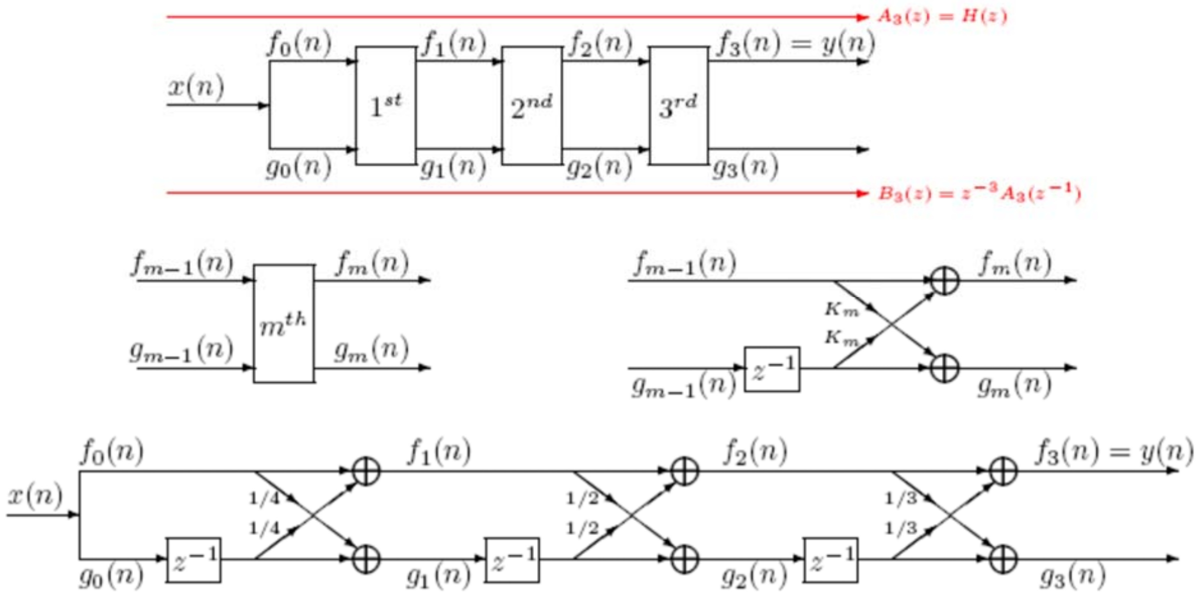


Figura 4.14. Structura laticială pentru filtrul FIR $H(z)=1+\frac{13}{24}z^{-1}+\frac{5}{8}z^{-2}+\frac{1}{3}z^{-3}$

Cu ajutorul ecuaţiilor recursive (4.28), (4.29) şi ţinînd cont de relaţia (4.27), putem evalua ieşirea $y(n)$. Începem cu evaluarea ieşirilor corespunzătoare primului stagiu, adică pentru $m=1$:

$$f_1(n)=f_0(n)+K_1g_0(n-1)=x(n)+\frac{1}{4}x(n-1)$$

$$g_1(n)=K_1f_0(n)+g_0(n-1)=\frac{1}{4}x(n)+x(n-1)$$

Continuăm cu $m=2$, evaluând ieşirile celui de-al doilea stagiu

$$f_2(n)=f_1(n)+K_2g_1(n-1)=x(n)+\frac{1}{4}x(n-1)+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}x(n-1)+x(n-2)\right]$$

$$\Rightarrow f_2(n)=x(n)+\frac{3}{8}x(n-1)+\frac{1}{2}x(n-2)$$

$$g_2(n)=K_2f_1(n)+g_1(n-1)=\frac{1}{2}\left[x(n)+\frac{1}{4}x(n-1)\right]+\frac{1}{4}x(n-1)+x(n-2)$$

$$\Rightarrow g_2(n)=\frac{1}{2}x(n)+\frac{3}{8}x(n-1)+x(n-2)$$

În cazul implementării laticiale, ieşirea $y(n)$ este dată de relaţia (4.30). Pentru $m=3$, obţinem ieşirea $y(n)$, corespunzătoare filtrului FIR

$$\begin{aligned}y(n)&=f_3(n)=f_2(n)+K_3g_2(n-1)\\&=x(n)+\frac{3}{8}x(n-1)+\frac{1}{2}x(n-2)+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}x(n-1)+\frac{3}{8}x(n-2)+x(n-3)\right]\end{aligned}$$

$$\Rightarrow y(n)=x(n)+\frac{13}{24}x(n-1)+\frac{5}{8}x(n-2)+\frac{1}{3}x(n-3).$$

Problema 15 – Determinarea filtrului FIR pe baza coeficienților laticiali: Se doreşte determinarea funcţiei de transfer a unui filtru FIR, cunoscându-se coeficienţii laticiali.

Se consideră coeficienţii laticiali:

$$K_1 = \frac{1}{2},\ K_2 = -\frac{1}{3} \text{ şi } K_3 = \frac{1}{4},$$

corespunzători unei structuri laticiale cu trei latici. Se va determina funcţia de transfer $H(z)$ şi coeficienţii filtrului FIR pentru realizarea în forma directă $\alpha_m(k)$, răspunsul la impuls al filtrului $h(n)$ şi ieşirea sistemului $y(n)$. În final se vor ilustra grafic structura laticală şi implementarea în formă directă.

Rezolvare

Pentru determinarea funcţiei de transfer şi a coeficienţilor filtrului FIR pentru implementarea în formă directă, se vor utiliza relaţiile (4.43)÷(4.45). Problema se rezolvă recursiv, începînd cu $m=1$

$$A_1(z) = A_0(z) + K_1 z^{-1} B_0(z) = 1 + \frac{1}{2} z^{-1}$$

Prin urmare, coeficienţii filtrului FIR corespunzători structurii laticiale cu o singură latice, sunt daţi de relaţiile (4.48)÷(4.50), adică

$$\alpha_1(0) = 1 \qquad \alpha_1(1) = K_1 = \frac{1}{2}$$

Deoarece $B_m(z)$ este reciprocul lui $A_m(z)$ $\quad \Rightarrow B_1(z) = \frac{1}{2} + z^{-1}$

Se adaugă a doua latice structurii laticiale. Pentru $m=2$, rezultă

$$A_2(z) = A_1(z) + K_2 z^{-1} B_1(z) = 1 + \frac{1}{2} z^{-1} - \frac{1}{3} z^{-1}\left(\frac{1}{2} + z^{-1}\right) = 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) z^{-1} - \frac{1}{3} z^{-2} = 1 + \frac{1}{3} z^{-1} - \frac{1}{3} z^{-2}$$

Parametrii filtrului FIR corespunzători structurii laticiale cu două latici sunt:

$$\alpha_2(0) = 1 \qquad \alpha_2(1) = \frac{1}{3} \qquad \alpha_2(2) = -\frac{1}{3}$$

iar polinomul reciproc $B_2(z)$ este $B_2(z) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} z^{-1} + z^{-2}$

În final, prin adăugarea celui de-al treilea stagiu în structura laticială, rezultă polinomul $A_3(z)$

$$A_3(z) = A_2(z) + K_3 z^{-1} B_2(z) = 1 + \frac{1}{3} z^{-1} - \frac{1}{3} z^{-2} + \frac{1}{4} z^{-1}\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} z^{-1} + z^{-2}\right)$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12}\right) z^{-1} + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{12}\right) z^{-2} + \frac{1}{4} z^{-3} = 1 + \frac{1}{4} z^{-1} - \frac{1}{4} z^{-2} + \frac{1}{4} z^{-3}$$

şi, ca urmare, filtrul FIR în formă directă este caracterizat de coeficienţii

$$\alpha_3(0) = 1 \qquad \alpha_3(1) = \frac{1}{4} \qquad \alpha_3(2) = -\frac{1}{4} \qquad \alpha_3(3) = \frac{1}{4}$$

iar polinomul reciproc $B_3(z)$ este $B_3(z) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} z^{-1} + \frac{1}{4} z^{-2} + z^{-3}$

În cazul sistemului FIR, funcţia de transfer $H(z) = A_{M-1}(z)$, adică

$$H(z) = A_3(z) = 1 + \frac{1}{4} z^{-1} - \frac{1}{4} z^{-2} + \frac{1}{4} z^{-3}$$

Pentru determinarea răspunsului la impuls se aplică transformata în z inversă funcţiei de sistem:

$$h(n) = Z^{-1}\{H(z)\} = \left\{\underset{\uparrow}{1}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right\}$$

Considerând relaţia (4.6), ieşirea sistemului este

$$y(n)=x(n)+\frac{1}{4}x(n-1)-\frac{1}{4}x(n-2)+\frac{1}{4}x(n-3)$$

Având daţi coeficienţii laticiali, implementarea corespunzătoare este cea din figura 4.15.

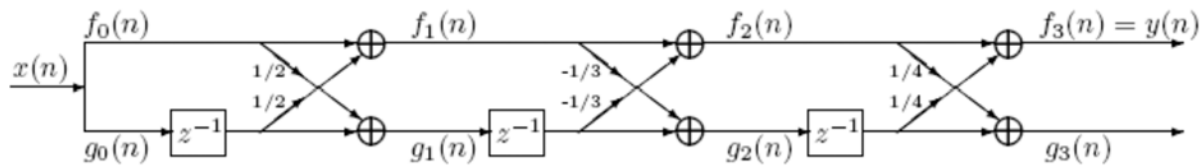


Figura 4.15. Structura laticială pentru filtrul FIR $H(z)=1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{4}z^{-2}+\frac{1}{4}z^{-3}$

Cu coeficienţii formei directe evaluaţi anterior

$$\alpha_3(0)=1 \qquad \alpha_3(1)=\frac{1}{4} \qquad \alpha_3(2)=-\frac{1}{4} \qquad \alpha_3(3)=\frac{1}{4}$$

putem realiza implementarea acestui filtru, ca în figura 4.16.

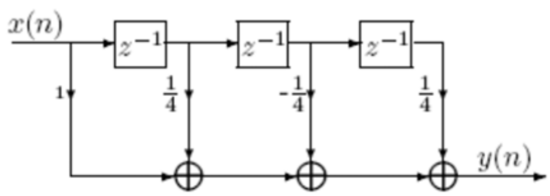


Figura 4.16. Structura directă pentru filtrul FIR $H(z)=1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{4}z^{-2}+\frac{1}{4}z^{-3}$

Problema 16 – Filtru FIR, implementare cu eșantionare în frecvență: Se urmăreşte implementarea unui filtru cu răspuns finit la impuls, pentru care se cunosc valorile eşantioaneleor în domeniul frecvenţă. Se va realiza atât implementarea în formă directă, cât şi cea cu eşantionare în frecvenţă, pentru a evidenţia complexitatea de calculul pentru cele două structuri.

Se consideră filtrul FIR cu fază liniară, cu $M=15$ şi $\alpha=0$, descris de eşantioanele în frecvenţă:

$$H\left(\frac{2\pi k}{15}\right)=\begin{cases}1, & k=\overline{0,2},\\ \frac{1}{3}, & k=3,\\ 0, & k=\overline{4,7}.\end{cases}$$

Rezolvare

Deoarece filtrul este de fază liniară, răspunsul său la impuls prezintă o formă de simetrie, care va conduce, în cazul implementării în forma directă, la reducerea numărului de multiplicări de la 15 la 8. Numărul de sumatoare este 14. Diagrama bloc a formei directe de implementare este ilustrată în figura 4.17.

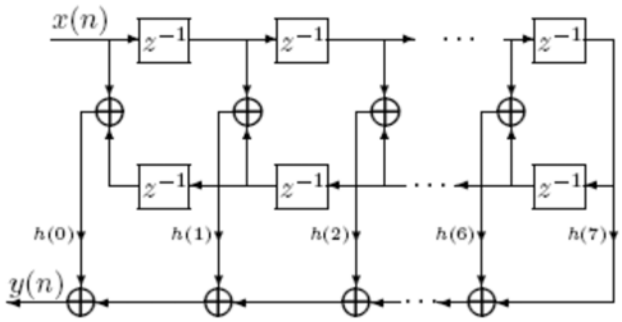


Figura 4.17. Implementarea în formă directă pentru filtrul FIR de fază liniară cu $M=15$

Pentru implementarea cu eşantionare în frecvenţă folosim relaţiile (4.17), (4.19), respectiv (4.21) şi eliminăm toţi coeficienţii cu câştig zero, $H(k)$. Coeficienţii cu câştig nenul sunt $H(k)$ şi perechile corespunzătoare $H(M-k)$, pentru $k=\overline{0,3}$.

Pentru $M=15$, funcţiile de transfer $H_1(z)$, respectiv $H_2(z)$ sunt:

$$H_1(z)=\frac{1}{15}\left(1-z^{-15}\right),$$

$$H_2(z)=\frac{H(0)}{1-z^{-1}}+\sum_{k=1}^{(15-1)/2}\frac{A(k)+B(k)z^{-1}}{1-2\cos\frac{2\pi k}{15}z^{-1}+z^{-2}}$$

$$=\frac{1}{1-z^{-1}}+\frac{A(1)+B(1)z^{-1}}{1-2\cos\frac{2\pi}{15}z^{-1}+z^{-2}}+\frac{A(2)+B(2)z^{-1}}{1-2\cos\frac{4\pi}{15}z^{-1}+z^{-2}}+\frac{A(3)+B(3)z^{-1}}{1-2\cos\frac{6\pi}{15}z^{-1}+z^{-2}}$$

$$A(k)=H(k)+H(M-k),\qquad B(k)=H(k)e^{-j\frac{2\pi k}{15}}+H(M-k)e^{j\frac{2\pi k}{15}}$$

Considerând răspunsul la impuls simetric, obţinem succesiv:

1. pentru $k=1$

$$A(1)=H(1)+H(14)=2$$

$$B(1)=H(1)e^{-j\frac{2\pi}{15}}+H(14)e^{j\frac{2\pi}{15}}=2\cos\frac{2\pi}{15}$$

2. pentru $k=2$

$$A(2)=H(2)+H(13)=2$$

$$B(2)=H(2)e^{-j\frac{4\pi}{15}}+H(13)e^{j\frac{4\pi}{15}}=2\cos\frac{4\pi}{15}$$

3. pentru $k=3$

$$A(3)=H(3)+H(12)=\frac{2}{3}$$

$$B(3)=H(3)e^{-j\frac{6\pi}{15}}+H(12)e^{j\frac{6\pi}{15}}=\frac{2}{3}\cos\frac{6\pi}{15}$$

În consecinţă, $H_2(z)$ este

$$H_2(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}+\frac{2+2\cos\frac{2\pi}{15}z^{-1}}{1-2\cos\frac{2\pi}{15}z^{-1}+z^{-2}}+\frac{2+2\cos\frac{4\pi}{15}z^{-1}}{1-2\cos\frac{4\pi}{15}z^{-1}+z^{-2}}+\frac{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cos\frac{6\pi}{15}z^{-1}}{1-2\cos\frac{6\pi}{15}z^{-1}+z^{-2}}$$

Deoarece $H(0)=1$, filtrul cu un singur pol nu necesită operaţii de multiplicare. Cele trei filtre cu doi poli necesită trei multiplicări fiecare, deci, în total, nouă multiplicări. Numărul total de adunări este 14. Prin urmare, implementarea cu eşantionare în frecvenţă a filtrului FIR este, din punct de vedere al calculului, mult mai eficientă decât forma directă de implementare. Diagrama bloc pentru acest tip de implementare este cea din figura 4.18.

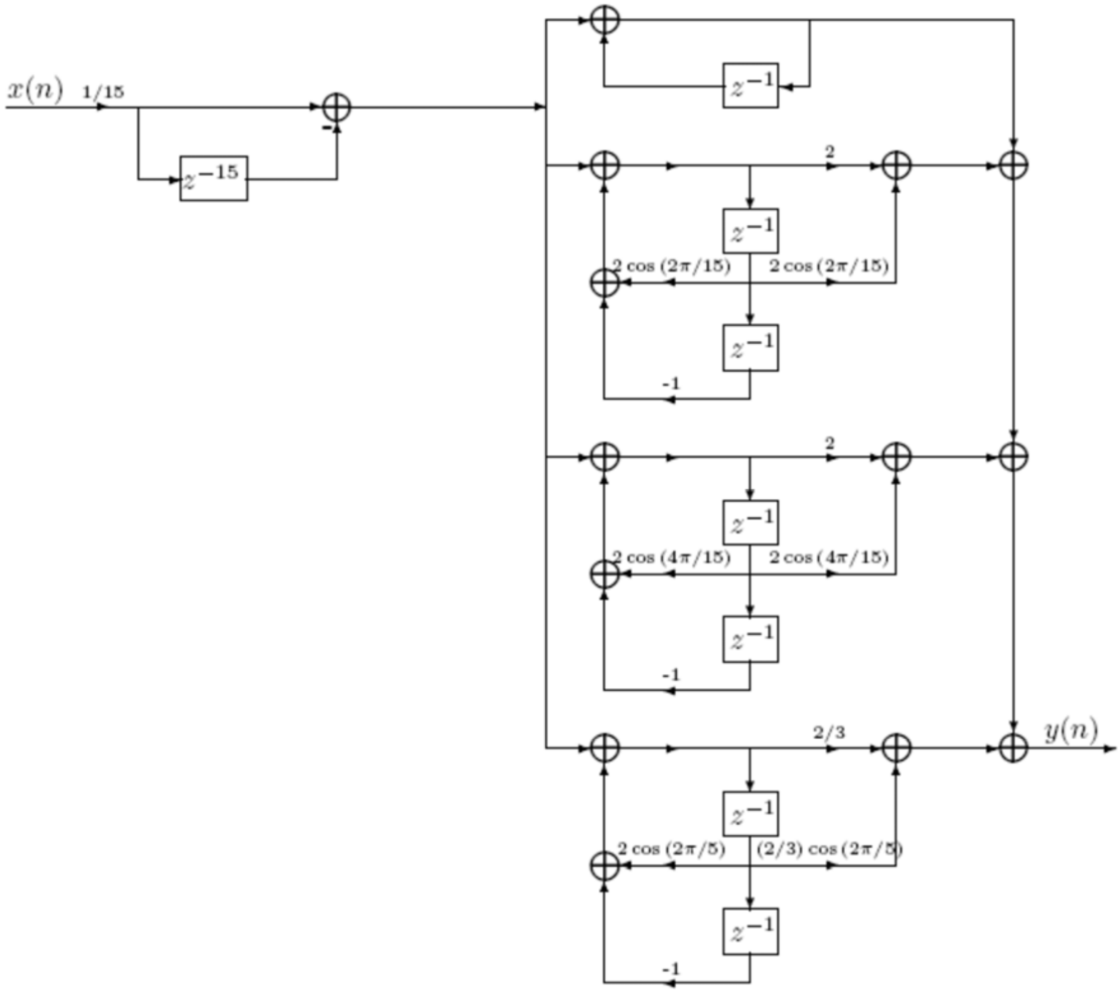


Figura 4.18. Implementarea cu eşantionare în frecvenţă, FIR de fază liniară, $M=15$

Problema 17 – Filtru FIR, implementare cascadă: Acest exemplu ilustrează implementarea în forma cascadă pentru un sistem FIR, căruia i se cunoaşte relaţia de intrare-ieşire.

Se consideră sistemul descris de ecuaţia cu diferenţe finite şi coeficienţi constanţi:

$$y(n)=x(n)-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{7}x(n-1)-\frac{15}{16}x(n-2)+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{7}x(n-3)-\frac{1}{16}x(n-4)$$

Se va determina funcţia de sistem corespunzătoare şi se va implementa sistemul în forma cascadă.

Rezolvare

Fiind vorba despre un sistem FIR, relaţia de intrare-ieşire este dată de ecuaţia (4.3), iar funcţia de sistem de ecuaţia (4.4). Ca atare, funcţia de transfer corespunzătoare acestui sistem este

$$H(z)=1-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{7}z^{-1}-\frac{15}{16}z^{-2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{7}z^{-3}-\frac{1}{16}z^{-4}$$

Funcţia de transfer se poate obţine şi aplicând transformata în z, ecuaţiei cu diferenţe finite:

$$Y(z)=X(z)-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{7}z^{-1}X(z)-\frac{15}{16}z^{-2}X(z)+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{7}z^{-3}X(z)-\frac{1}{16}z^{-4}X(z)$$

$$\Leftrightarrow Y(z)=X(z)\left(1-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{7}z^{-1}-\frac{15}{16}z^{-2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{7}z^{-3}-\frac{1}{16}z^{-4}\right)$$

$$\Rightarrow H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=1-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{7}z^{-1}-\frac{15}{16}z^{-2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{7}z^{-3}-\frac{1}{16}z^{-4}$$

Implementarea în cascadă presupune scrierea funcţiei de sistem dată de relaţia (4.4) sub forma unui produs de factori $H_k(z)$, $k=\overline{1,K}$, ca în relaţia (4.8) unde, în cazul implementării cu module de ordinul doi:

$$H_k(z)=1+b_{k1}z^{-1}+b_{k2}z^{-2}.$$

Pentru că funcţia de transfer este de ordinul patru, pentru implementarea în cascadă, avem:

$$H(z)=H_1(z)H_2(z)$$

În prealabil trebuie aflate rădăcinile funcţie de transfer, adică zerourile funcţiei. Se observă că $z_1=1$ şi $z_2=-1$ sunt două dintre soluţii, de unde rezultă:

$$H_1(z)=\left(1-z_1z^{-1}\right)\left(1-z_2z^{-1}\right)=\left(1-z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}\right)=1-z^{-2}$$

Pentru aflarea lui $H_2(z)$, împărţim $H(z)$ la $H_1(z)$:

$$\begin{array}{l|l}
1-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{7}z^{-1}-\frac{15}{16}z^{-2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{7}z^{-3}-\frac{1}{16}z^{-4} & 1-z^{-2} \\ \cline{2-2}
\underline{-1\qquad\qquad\qquad\qquad +z^{-2}} & 1-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{7}z^{-1}+\frac{1}{16}z^{-2} \\
/\,-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{7}z^{-1}+\frac{1}{16}z^{-2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{7}z^{-3}-\frac{1}{16}z^{-4} & \\
\underline{-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{7}z^{-1}\qquad\qquad -\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{7}z^{-3}} & \\
\qquad /\qquad +\frac{1}{16}z^{-2}\qquad /\qquad -\frac{1}{16}z^{-4} & \\
\qquad /\qquad \underline{-\frac{1}{16}z^{-2}\qquad /\qquad +\frac{1}{16}z^{-4}} & \\
\qquad\qquad\quad /\qquad\qquad\qquad / &
\end{array}$$

$$\Rightarrow H_2(z)=1-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{7}z^{-1}+\frac{1}{16}z^{-2}$$

Zerourile lui $H_2(z)$ sunt

$$z_{3,4}=\frac{\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{7}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{7}\right)^2-4\frac{1}{16}}}{2}=\frac{\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{7}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\pi}{7}-1}}{2}=\frac{1}{2}\frac{\cos\frac{\pi}{7}\pm j\sin\frac{\pi}{7}}{2}$$

$$\Rightarrow z_{3,4}=\frac{1}{4}e^{\pm j\frac{\pi}{7}}$$

În concluzie, cele două funcţii de sistem sunt:

$$H_1(z)=1-z^{-2}=\left(1-z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}\right)$$

$$H_2(z)=1-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{7}z^{-1}+\frac{1}{16}z^{-2}=\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{7}}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{7}}z^{-1}\right)$$

iar implementarea în cascadă este ilustrată în figura 4.19.

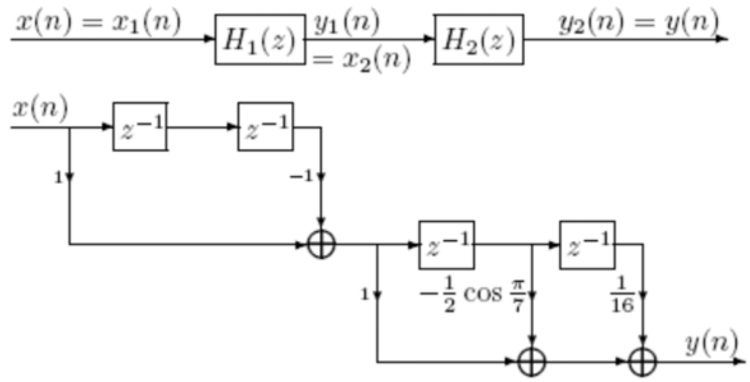


Figura 4.19. Implementarea în forma cascadă pentru filtrul FIR

Problema 18 – Filtru IIR, implementare directă, cascadă și paralelă: Se consideră un sistem cu poli şi zerouri descris de funcţia de sistem

$$H(z)=\frac{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{2}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{5}e^{-j\frac{\pi}{3}}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{5}e^{j\frac{\pi}{3}}z^{-1}\right)}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)}$$

Se va determina ieşirea sitemului $y(n)$ şi se va implementa sistemul în forma I directă, forma canonică, forma cascadă, respectiv forma paralelă.

Rezolvare

Fiind vorba despre un sistem IIR cu poli şi zerouri, ieşirea este dată de relaţia (4.1), iar funcţia de transfer de relaţia (4.2). Pentru sistemul considerat $N=4$ şi $M=4$. Funcţia de transfer este:

$$H(z)=\frac{\left(1+\frac{1}{6}z^{-1}-\frac{1}{3}z^{-2}\right)\left(1-\frac{2}{5}\cos\frac{\pi}{3}z^{-1}+\frac{1}{25}z^{-2}\right)}{\left(1-z^{-2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}z^{-1}+\frac{1}{16}z^{-2}\right)}=\frac{\left(1+\frac{1}{6}z^{-1}-\frac{1}{3}z^{-2}\right)\left(1-\frac{1}{5}z^{-1}+\frac{1}{25}z^{-2}\right)}{\left(1-z^{-2}\right)\left(1-\frac{\sqrt{2}}{4}z^{-1}+\frac{1}{16}z^{-2}\right)}$$

$$\Rightarrow H(z)=\frac{1-\frac{1}{30}z^{-1}-\frac{49}{150}z^{-2}+\frac{11}{150}z^{-3}-\frac{1}{75}z^{-4}}{1-\frac{\sqrt{2}}{4}z^{-1}-\frac{15}{16}z^{-2}+\frac{\sqrt{2}}{4}z^{-3}-\frac{1}{16}z^{-4}}$$

Ieşirea, ţinând cont de coeficienţii a_k şi b_k

$$a_1=-\frac{\sqrt{2}}{4}\qquad a_2=-\frac{15}{16}\qquad a_3=\frac{\sqrt{2}}{4}\qquad a_4=-\frac{1}{16}$$

$$b_0=1\qquad b_1=-\frac{1}{30}\qquad b_2=-\frac{49}{150}\qquad b_3=\frac{11}{150}\qquad b_4=-\frac{1}{75}$$

este

$$y(n)=\frac{\sqrt{2}}{4}y(n-1)+\frac{15}{16}y(n-2)-\frac{\sqrt{2}}{4}y(n-3)+\frac{1}{16}y(n-4)$$
$$+x(n)-\frac{1}{30}x(n-1)-\frac{49}{150}x(n-2)+\frac{11}{150}x(n-3)-\frac{1}{75}x(n-4)$$

Pentru implementarea sub forma I directă, funcţia de sistem trebuie scrisă ca un produs de două funcţii de sistem: una care conţine toate zerourile funcţiei de transfer, şi una care conţine toţi polii acesteia, ca în relaţiile (4.55)÷(4.57). În cazul de faţă

$$H_1(z) = 1 - \frac{1}{30}z^{-1} - \frac{49}{150}z^{-2} + \frac{11}{150}z^{-3} - \frac{1}{75}z^{-4}$$

$$H_2(z) = \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{2}}{4}z^{-1} - \frac{15}{16}z^{-2} + \frac{\sqrt{2}}{4}z^{-3} - \frac{1}{16}z^{-4}}$$

iar implementarea sub forma I directă este cea din figura 4.20.

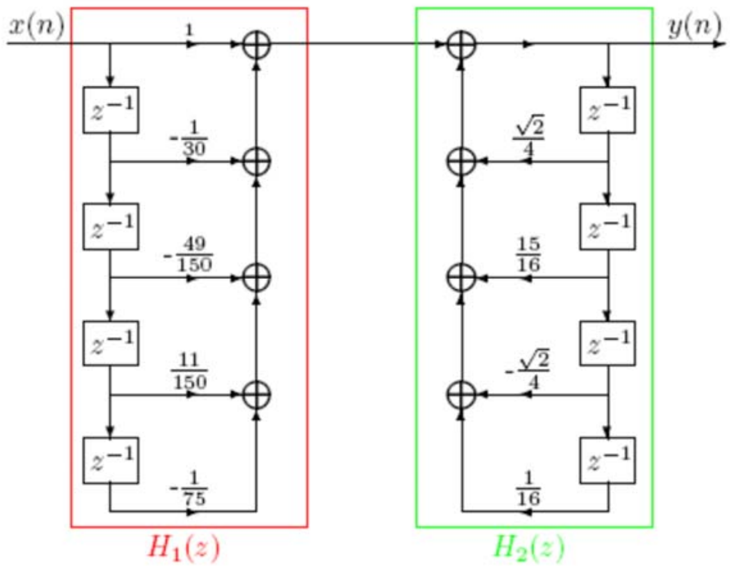


Figura 4.20. Forma I directă pentru sistemul IIR

Dacă se plasează filtrul numai cu poli, înaintea celui care are doar zerouri, se obţine forma canonică (forma a II-a directă), ca în figura 4.21.

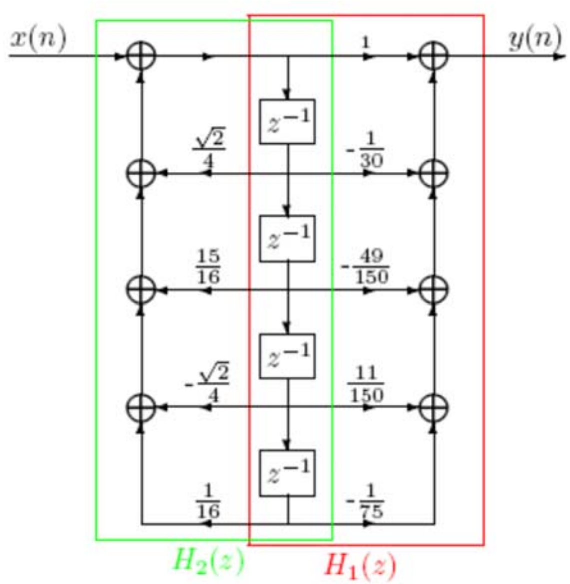


Figura 4.21. Forma canonică pentru sistemul IIR (forma a II-a directă)

Pentru implementarea sub forma cascadă sistemul trebuie divizat într-o cascadă de subsisteme de ordinul doi, ca în relaţia (4.58), unde fiecare subsistem este de forma (4.59) . Rădăcinile complex-conjugate, atât pentru numărător, cât şi pentru numitor, vor fi combinate împreună, pentru a evita calculele cu numere complexe. Sistemul propus va fi compus dintr-o cascadă de două susbsisteme de ordinul al doilea, date de relaţiile:

$$H_1(z)=\frac{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{2}{3}z^{-1}\right)}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}\right)}=\frac{1+\frac{1}{6}z^{-1}-\frac{1}{3}z^{-2}}{1-z^{-2}}$$

$$H_2(z)=\frac{\left(1-\frac{1}{5}e^{-j\frac{\pi}{3}}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{5}e^{j\frac{\pi}{3}}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)}=\frac{1-\frac{1}{5}z^{-1}+\frac{1}{25}z^{-2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{4}z^{-1}+\frac{1}{16}z^{-2}}$$

Implementarea sub formă cascadă este ilustrată în figura 4.22.

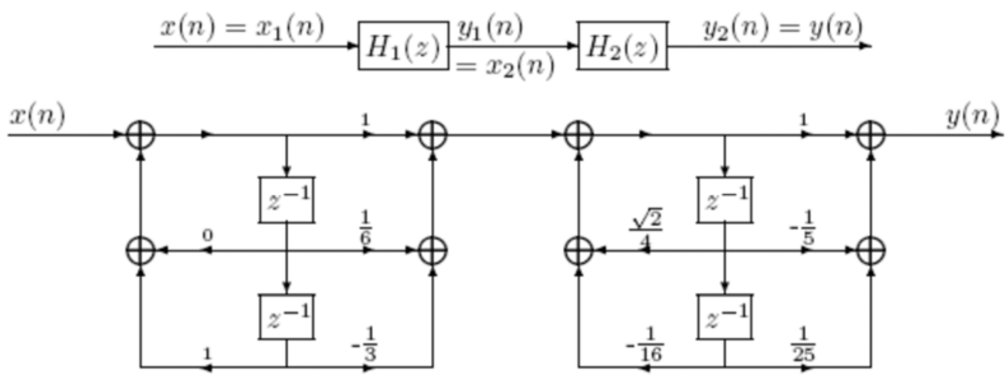


Figura 4.22. Implementarea cascadă pentru sistemul IIR

Pentru implementarea în paralel, funcţia de transfer trebuie descompusă în fracţii simple ca în relaţia (4.60). Vom descompune în fracţii simple funcţia de transfer, $H(z)$:

$$H(z)=\frac{A_1}{1-z^{-1}}+\frac{A_2}{1+z^{-1}}+\frac{A_3}{1-\frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}}+\frac{A_4}{1-\frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}}$$

Evaluând pentru $z^{-1}=1$, vom obţine coeficientul A_1, evaluând pentru $z^{-1}=-1$, vom obţine coeficientul A_2 respectiv evaluând pentru $z^{-1}=4\big/e^{-j\frac{\pi}{4}}$, vom obţine coeficientul A_3.

$$A_1\Big|_{z^{-1}=1}=\frac{1-\frac{1}{30}-\frac{49}{150}+\frac{11}{150}-\frac{1}{75}}{(1+1)\left(1-\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{16}\right)}=\frac{105}{150}\frac{8}{17-4\sqrt{2}}=\frac{28}{56.72}$$

$$\Rightarrow A_1=0.4937$$

$$A_2\Big|_{z^{-1}=-1}=\frac{1+\frac{1}{30}-\frac{49}{150}-\frac{11}{150}-\frac{1}{75}}{(1+1)\left(1+\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{16}\right)}=\frac{93}{150}\frac{8}{17+4\sqrt{2}}=\frac{124}{566.42}$$

$$\Rightarrow A_2=0.2189$$

$$A_3\Big|_{z^{-1}=\frac{4}{e^{-j\frac{\pi}{4}}}}=\frac{1-\frac{1}{30}\frac{4}{e^{-j\frac{\pi}{4}}}-\frac{49}{150}\left(\frac{4}{e^{-j\frac{\pi}{4}}}\right)^2+\frac{11}{150}\left(\frac{4}{e^{-j\frac{\pi}{4}}}\right)^3-\frac{1}{75}\left(\frac{4}{e^{-j\frac{\pi}{4}}}\right)^4}{\left(1-\frac{4}{e^{-j\frac{\pi}{4}}}\right)\left(1+\frac{4}{e^{-j\frac{\pi}{4}}}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{4}}\frac{4}{e^{-j\frac{\pi}{4}}}\right)}$$

$$=\frac{1-\frac{2e^{j\frac{\pi}{4}}}{15}-\frac{49\cdot 8e^{j\frac{\pi}{2}}}{75}+\frac{11\cdot 32e^{j\frac{3\pi}{4}}}{75}-\frac{256e^{j\pi}}{75}}{\left(1-16e^{j\frac{\pi}{2}}\right)\left(1-e^{j\frac{\pi}{2}}\right)}$$

$$=\frac{75-10\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-j392+352\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+256}{75\left(1-j17-16\right)}=\frac{331-181\sqrt{2}-j392+j171\sqrt{2}}{75\left(-15-j17\right)}$$

$$=\frac{75.066-j150.206}{75\left(-15-j17\right)}\cong\frac{75-j150}{75\left(-15-j17\right)}=\frac{1-j2}{-15-j17}=\frac{\left(1-j2\right)\left(-15+j17\right)}{\left(-15-j17\right)\left(-15+j17\right)}=\frac{19+j47}{514}$$

$$\Rightarrow A_3=0.037+j0.091$$

Deoarece polii $p_3=\frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{4}}$ şi $p_4=\frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{4}}$ au valori complex-conjgate şi coeficienţii A_3 şi A_4 vor avea valori complex-conjugate, adică:

$$A_4=A^*_3=0.037-j0.091$$

Funcţia de transfer, $H\left(z\right)$, descompusă în fracţii simple este:

$$H\left(z\right)=\underbrace{\frac{0.4937}{1-z^{-1}}+\frac{0.2189}{1+z^{-1}}}_{H_1(z)}+\underbrace{\frac{0.037+j0.091}{1-\frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}}+\frac{0.037-j0.091}{1-\frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}}}_{H_2(z)}$$

Pentru a evita operaţiile cu numere complexe, se pot combina perechi de poli complex-conjugaţi pentru a forma subsisteme de ordinul al doilea cu coeficienţi reali. Fiecare dintre aceste subsisteme va avea funcţia de sistem de forma (4.61). Vom grupa polii complex-conjugaţi, p_3 şi p_4 împreună, respectiv polii reali p_1 şi p_2 împreună, pentru a forma două subsisteme de ordinul al doilea. Astfel:

$$H\left(z\right)=H_1\left(z\right)+H_2\left(z\right)$$

unde

$$H_1\left(z\right)=\frac{0.7126+0.2748z^{-1}}{1-z^{-2}},$$

$$H_2\left(z\right)=\frac{0.07406+0.01927z^{-1}}{1-0.35355z^{-1}+0.0625z^{-2}}.$$

Având funcţiile de transfer corespunzătoare celor două subsisteme din implementarea în forma paralelă, realizarea paralelă se poate face ca în figura 4.23.

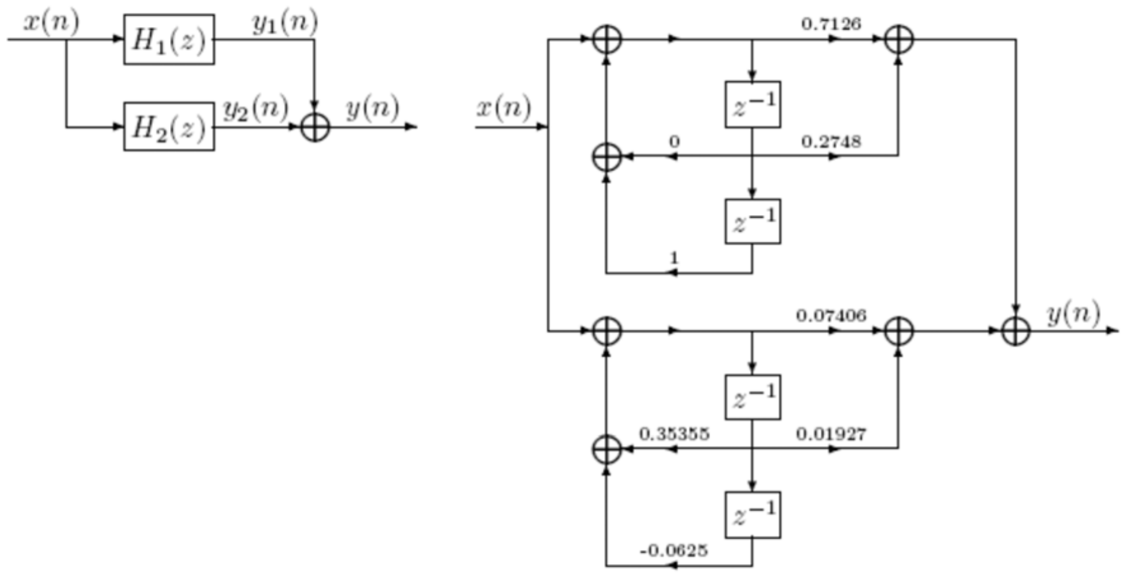


Figura 4.23. Implementarea paralelă pentru filtru IIR

Problema19 – Filtru IIR numai cu poli, structura laticială: Pentru sistemul IIR descris de funcţia de transfer

$$H(z)=\frac{1}{1+0.9z^{-1}-0.8z^{-2}+0.5z^{-3}}$$

Se vor de termina coeficienţii laticiali, se va realiza implementarea laticială şi se va evalua ieşirea sistemului.

Rezolvare

Fiind un sistem laticial IIR numai cu poli, trebuie determinaţi doar coeficienţii laticiali K_i, $i=\overline{1,N}$, folosind relaţiile de decrementare ca la **Problema 14**. Pentru sistemul IIR doar cu poli, funcţia de sistem este:

$$H(z)=\frac{1}{A_N(z)}=\frac{1}{A_3(z)}$$

$$\Rightarrow A_3(z)=1+0.9z^{-1}-0.8z^{-2}+0.5z^{-3}$$

Se observă că

$$K_3=\alpha_3(3)=0.5\Rightarrow B_3(z)=0.5-0.8z^{-1}+0.9z^{-2}+z^{-3}$$

Folosind testul de stabilitate Schür-Cohn, dat de relaţia (4.52), pentru $m=3$, obţinem

$$A_2(z)=\frac{A_3(z)-K_3B_3(z)}{1-K_3^2}=\frac{1+0.9z^{-1}-0.8z^{-2}+0.5z^{-3}-0.5\left(0.5-0.8z^{-1}+0.9z^{-2}+z^{-3}\right)}{1-(0.5)^2}$$

$$=\frac{1-0.25}{1-0.25}+\frac{0.9+0.4}{1-0.25}z^{-1}+\frac{-0.8-0.45}{1-0.25}z^{-2}+\frac{0.5-0.5}{1-0.25}z^{-3}=1+\frac{1.3}{0.75}z^{-1}-\frac{1.25}{0.75}z^{-2}$$

$$\Rightarrow A_2(z)=1+1.73z^{-1}-1.67z^{-2}$$

Prin urmare

$$K_2=\alpha_2(2)=-1.67\Rightarrow B_2(z)=-1.67+1.73z^{-1}+z^{-2}$$

Repetând decrementarea recursivă, pentru $m=2$, obţinem

$$A_1(z)=\frac{A_2(z)-K_2B_2(z)}{1-K_2^2}=\frac{1+1.73z^{-1}-1.67z^{-2}+1.67\left(-1.67+1.73z^{-1}+z^{-2}\right)}{1-(-1.67)^2}$$

$$=1+\frac{1.73(1+1.67)}{(1-1.67)(1+1.67)}z^{-1}=1-\frac{1.73}{0.67}z^{-1}$$

$$\Rightarrow A_1(z)=1-2.59z^{-1}$$

Prin urmare

$$K_1=\alpha_1(1)=-2.59\Rightarrow B_1(z)=-2.59+z^{-1}$$

Având trei coeficienţi laticiali, implementarea laticială va conţine trei latici, ca în figura 4.24.

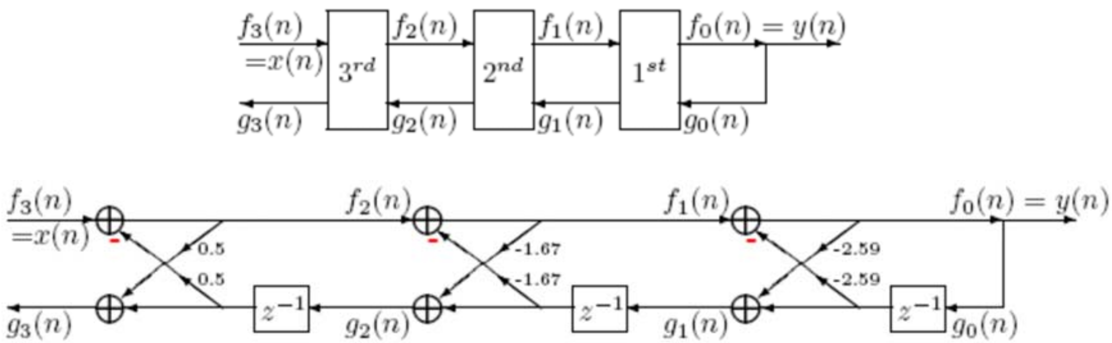


Figura 4.24. Implementarea laticială a sistemului IIR numai cu poli,

$$H(z)=\frac{1}{1+0.9z^{-1}-0.8z^{-2}+0.5z^{-3}}$$

Ieşirea sistemului va fi:

$$y(n)=-0.9y(n-1)+0.8y(n-2)-0.5y(n-3)+x(n)$$

Problema 20 – Filtru IIR cu poli şi zerouri, structura laticială-scară: Acest exemplu urmăreşte implementarea unui sistem IIR cu poli şi zerouri sub forma laticială-scară.

Se consideră sistemul descris de funcţia de transfer:

$$H(z)=\frac{1-0.2z^{-1}+0.15z^{-2}}{1+0.1z^{-1}-0.72z^{-2}}$$

Se va evalua şi ieşirea sistemului, în funcție de intrare, în domeniul timp.

Rezolvare

Funcţia de sistem corespunzătoare filtrului IIR cu poli şi zerouri este:

$$H(z)=\frac{C_M(z)}{A_N(z)}=\frac{C_2(z)}{A_2(z)}$$

Cu ajutorul polinomului $A_N(z)$ vom determina coeficienţii laticiali K_i, $i=\overline{1,N}$, folosind relaţiile de decrementare ca la **Problema 19**.

$$A_2(z)=1+0.1z^{-1}-0.72z^{-2}$$

Prin urmare

$$K_2=\alpha_2(2)=-0.72\Rightarrow B_2(z)=-0.72+0.1z^{-1}+z^{-2}$$

Repetând decrementarea recursivă, pentru $m=2$, obţinem

$$A_1(z)=\frac{A_2(z)-K_2B_2(z)}{1-K_2^2}=\frac{1+0.1z^{-1}-0.72z^{-2}+0.72\left(-0.72+0.1z^{-1}+z^{-2}\right)}{1-(-0.72)^2}$$

$$=1+\frac{0.1(1+0.72)}{(1-0.72)(1+0.72)}z^{-1}=1+\frac{0.1}{0.28}z^{-1}$$

$$\Rightarrow A_1(z)=1+0.36z^{-1}$$

$$\Rightarrow K_1=\alpha_1(1)=0.36\Rightarrow B_1(z)=0.36+z^{-1}$$

Conform relaţiei (4.43)

$$A_0(z)=B_0(z)=1$$

Acum putem trece la evaluarea coeficienţilor scării $v_m,\ m=\overline{0,M}$.

$$C_2(z)=\sum_{m=0}^{2}v_mB_m(z)\Leftrightarrow C_2(z)=v_0B_0(z)+v_1B_1(z)+v_2B_2(z)$$

$$1-0.2z^{-1}+0.15z^{-2}=v_0\cdot 1+v_1\cdot\left(\frac{5}{14}+z^{-1}\right)+v_2\cdot\left(-\frac{18}{25}+\frac{1}{10}z^{-1}+z^{-2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1=v_0+0.36v_1-0.72v_2\\ -0.2=v_1+0.1v_2\\ 0.15=v_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v_2=0.15\\ v_1=-0.2-0.1\cdot 0.15\\ v_0=1-0.36(-0.2-0.1\cdot 0.15)+0.72\cdot 0.15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v_2=0.15\\ v_1=-0.215\\ v_0=1.185\end{cases}$$

Implementarea laticială-scară corespunzătoare sistemului IIR este ilustrată în figura 4.25.

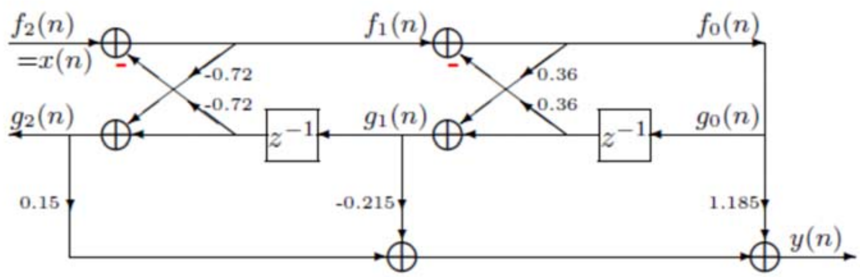


Figura 4.25. Implementarea laticială-scară, $H(z)=\dfrac{1-0.2z^{-1}+0.15z^{-2}}{1+0.1z^{-1}-0.72z^{-2}}$

Ieşirea sistemului IIR cu poli şi zerouri este:

$$y(n)=-0.1y(n-1)+0.72y(n-2)+x(n)-0.2x(n-1)+0.15x(n-2)$$